

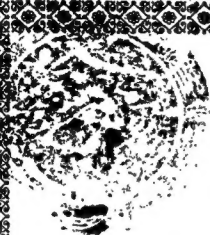
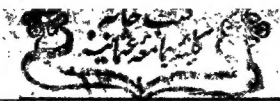
**THE BOOK WAS
DRENCHED**

**TEXT PROBLEM
WITHIN THE
BOOK ONLY**

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191057

UNIVERSAL
LIBRARY



كتاب

في الاصول الهندسية

وهو مشتمل على

كتب اقليدس الستة

ومضافات في تربيع الدائرة

وهندسة الاجسام

واصول قياس المثلثات المستوية والكروية

ترجمة

كرنيليوس فان ديك

بالرخصة الرسمية من مجلس معارف ولاية سورية الجليلة

طبع ثانية في مطبعة الامبركان في بيروت سنة ١٨٨٩

تفتيح
١٧٤٢

مقدمة

٥١٣
ف - م

الحمد لله الذي لا تحيط بدائرة علمه الاوهام . وهو المنزه عن مفادير
الاشكال ومساحة الاجسام . أما بعد فيقول العبد الفقير الى ربه
القدير كرنيليوس فان ذلك الاميركاني اني لما رأيت افتقار المدارس
في هذه البلاد الى الكتب الهندسية التي بها تتم الفائدة المقصودة منها
اعنيت بترجمة هذا الكتاب المفيد وهو مشتمل على كتب اقليدس
الستة ومضافات اخرى في تريع الدائرة وهندسة الاجسام واصول
قياس المثلثات المستوية والكروية . والله المسؤول ان

ينفع به الطالبين ويفيد الراغبين ويجعله

مخلصاً لوجهه الكريم وهو ارحم

الراحمين

نبذة تاريخية

ان الفيلسوف اقليدس صاحب كتاب الاصول الهندسية عاش في بلاد مصر نحو ٢٨٠ سنة ق. م في عصر الملك بطليموس لاغوس. قيل وُلد في الاسكندرية وقيل مولده مجهول وصار معلّم العلوم التعليمية في مدرسة الاسكندرية وكثر تلاميذه ومنهم الملك بطليموس نفسه. قيل سألهُ الملك يوماً ألا يوجد سبيل اسهل لمعرفة العالم فقال لا توجد سكة سلطانية لذلك. وله مؤلفات في علم الهيئة والبصريات واشهر مؤلفاته الاصول الهندسية ولم تنزل الى ايامنا هذه افضل ما صُنِفَ في هذا الفن. غير انه قد دخل عليها بعض التغييرات والنقائص على نمادي الاجيال. وقد رجّعها الى اصلها المعلم شمسون الاسكوتسي ثم اضف اليها بعض المعلمين عدّة قضايا لكي تصير بذلك اكثر مناسبة لحال العالم في هذا العصر. واحسن نسخها واكثرها فائدة

النسخة التي اعطني بها المعلم بلايفار الاسكوتسي وهي

المعول عليها في هذه الترجمة

وبالله التوفيق

اصول الهندسة

—x—

الكتاب الاول

ايضاح الاصطلاحات والعلامات

- ١ الهندسة علم موضوعه قياس المقادير. والمقدار هو كل ما له واحد من ثلاثة اشياء وهي طول وعرض وعمق
- ٢ قد استعملت في علم الهندسة اصطلاحات شتى كالحد والفضية والاولية والنظرية والعلمية والسابقة والتعليلية والفرع وغير ذلك مما سترى
- ٣ الحد هو ايضاح معنى لفظة اصطلاحية. ويجب ان يكون تاماً لا اشكال فيه وان تكون الفاظة المفردة اعنيادية مفهومة
- ٤ الاولية قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاح كقولم الكل اعظم من جزءه
- ٥ النظرية قضية محتاجة الى برهان لاثبات صحتها كقولم ان الزوايا الثلاث من كل مثلث تعدل قائمتين
- ٦ البرهان المستقيم هو ما اثبت صحة قضية ويسمى ايضاً البرهان الايجابى
- ٧ البرهان غير المستقيم هو ما اثبت صحة قضية باثبات محالبة فسادها ويسمى ايضاً البرهان السلبي والتحويل الى المحال
- ٨ العلمية هي قضية حاوية عملاً مطلوب انما كقولم علينا ان نرسم خطاً عموداً على آخر او ان نقسم عدداً الى اجزاء مفروضة
- ٩ حل علمية هو استخراج جوابها. فان عبر عن ذلك باعلامي حلاً عددياً او بمبادئ هندسية هندسياً. وان تم بواسطة امتحانات فيكائيكياً او صناعياً
- ١٠ السابقة قضية استعدادية ذكرت قبل اخرى لكي يختصر بها برهان اخرى
- ١١ الفرع نتيجة تستنتج بالاستقامة من قضية سابقة لها

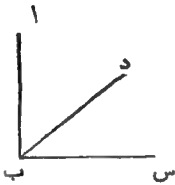
- ١٢ التعليقة قول مبني على قضية سابقة
- ١٣ الافتراض هو ان يسلم بصحة قضية لكي يبنى عليها برهان قضية اخرى
- ١٤ المتقنيات او الممكنات عمليات يسلم بإمكان عملها من اول وهلة
- ١٥ النظام هو صناعة وضع جملة براهين متتابعة على ترتيب مناسب للبحث عن صحة قضية او فسادها او لبرهانها للغير
- ١٦ التحليل هو استعمال صحة قضية بالتفكير من القضية نفسها الى مبداء معلوم ويسى ايضا النظام التحليلي وهو المستعمل في علم الجبر والمقابلة
- ١٧ التركيب هو التقدم شيئاً فشيئاً من مبداء معلوم بسيط الى النتيجة ويسى ايضا النظام التركيبي وهو المستعمل في علم الهندسة
- ١٨ العلامات المستعملة في هذا الكتاب قد تقدم شرحها في كتاب علم الجبر والمقابلة فعليك بالمراجعة

—CD—

حدود

- ١ النقطة شيء له وضع فقط وليس له طول ولا عرض ولا عمق
- ٢ الخط طول بدون عرض ولا عمق
- فرع. نهايتا خط نقطتان وموضع تقاطع خطين نقطة
- ٣ خطان لا يتوافقان في نقطتين منها بدون ان يتوافقا بالكلية
- يُسَمَّيان مستقيمين. وقيل ايضا الخط المستقيم هو البعد الاقرب بين نقطتين
- فرع. خطان مستقيمان لا يحيطان بمساحة ولا يتطابقان في جزء منها ان لم يتطابقا بالكلية
- ٤ السطح او البسيط ما كان له طول وعرض بدون عمق
- فرع. نهايات سطح خطوط. وموضع تقاطع سطحين خط

- ٥ السطح المستوي هو سطح اذا فُرِضَتْ فيه نقطتان فالخط المستقيم الموصل بينهما يقع جميعه في ذلك السطح
- ٦ الزاوية المستقيمة البسيطة هي انفراج خطين مستقيمين التقيا بنقطة وليسا على استقامة واحدة



تنبيه: متى التقت زاويتان فأكثر في نقطة واحدة كما يرى عند ب فكل واحدة منها تعين

بثلاثة احرف اوسطها عند راس الزاوية. فالزاوية الواقعة بين خط اب وخط دب تسمى زاوية اب د او دب ا والواقعة بين دب وس ب تسمى دب س او س ب د واما الزاوية المفردة فيدل عليها بحرف واحد كالزاوية عند ي



٧ اذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم واحداث زاويتين متساويتين على جانبيه فالخط القائم يسمى عموداً وكل زاوية منها قائمة

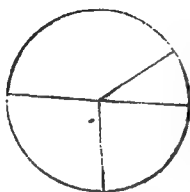
٨ الزاوية المنفرجة هي كل زاوية اكبر من قائمة



٩ الزاوية الحادة هي كل زاوية اصغر من قائمة

١٠ الشكل هيئة محدودة. ومساحة الشكل هي الفسحة المحصورة

في حدوده بدون نظر الى ماهية تلك الحدود



١١ الدائرة شكل مستوي يحيط به خط واحد ويسى المحيط. وفي وسطه نقطة جميع الخطوط المستقيمة الخارجة منها الى المحيط متساوية

١٢ النقطة المشار اليها تسمى مركز الدائرة

١٣ قُطر الدائرة خط مستقيم مارٌّ بمركزها ونهايتاه في محيطها

١٤ نصف الدائرة هو الشكل المحاط بالقطر والجزء من المحيط

المقطوع بالقطر

١٥ الاشكال المستقيمة الاضلاع هي المحدودة بخطوط مستقيمة

١٦ المثلث شكل يحيط به ثلاثة خطوط

تنبيه. المثلث المستوي هو ما احاط به ثلاثة خطوط مستقيمة

والكروي ما احاط به ثلاثة خطوط منحنية

١٧ ذو الاربعة الاضلاع شكل احاط به اربعة خطوط مستقيمة

١٨ الشكل الكثير الاضلاع ما احاط به اكثر من اربعة

خطوط مستقيمة



١٩ المثلث

المتساوي الاضلاع

هو ما كانت اضلاعه الثلاثة متساوية

٢٠ المثلث المتساوي الساقين هو ما كان ضلعان من اضلاعه

الثلاثة متساويين

٢١ المثلث المختلف الاضلاع هو ما كانت اضلاعه الثلاثة

غير متساوية



٢٢ المثلث

القائم الزاوية هو ما

كانت احدى زواياه قائمة

٢٣ المثلث المنفرج الزاوية هو ما كانت احدى زواياه منفرجة

٢٤ المثلث الحاد الزاوية هو ما كانت زواياه الثلاث حادة



٢٥ المربع شكل يحيط به اربعة

خطوط مستقيمة متساوية وكل زواياه

قائمة

٢٦ المستطيل هو ما كانت كل زواياه قائمة ولكن ليس كل

اضلاعه متساوية



٢٧ المعين ما كانت

اضلاعه متساوية ولكن

ليست فيه قائمة

٢٨ الشبه بالمعين ما كان ضلعاؤه المتقابلان متساويين وليست

فيه قائمة و اضلاعه الاربعة ليست متساوية

٢٩ كل ذي اربعة اضلاع غير ما ذكر يسمى منحرفا

٣٠ الخطوط المستقيمة المتوازية هي الواقعة في سطح واحد مستوي

ولا تلتنفي ولو أُخرجت في جهتها الى غير نهاية

مقتضيات او ممكنات

١ يمكن ان يوصل بين كل نقطتين بخط مستقيم او غير مستقيم
٢ يمكن ان يُخرج خطاً مستقيماً محدوداً على استقامته في جهته
الى حد ما يُراد

٣ يمكن ان تُرسم دائرة على اي مركز فُرض وعلى اي بُعد فُرض منه

اوليات

١ الاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض
٢ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات
متساوية

٣ اذا طُرحت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا
متساوية

٤ اذا أُضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية تكون
المجموعات غير متساوية

٥ اذا طُرحت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية تكون
البقايا غير متساوية

٦ الاشياء التي هي مضاعف شيء واحد هي متساوية

٧ الاشياء التي تعدل نصف شيء واحد هي متساوية

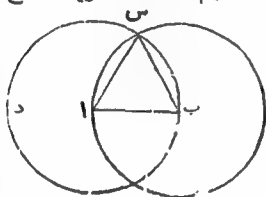
٨ المقادير المتطابقة اي التي تملأ مساحة واحدة هي متساوية

- ٩ الكل اعظم من جزئه
١٠ جميع الزوايا القائمة متساوية
١١ اذا تقاطع خطان مستقيمان لا يكونان موازيين لخط آخر

مستقيم

القضية الاولى . عملية

علينا ان نرسم مثلثاً متساوي الاضلاع على خط مستقيم محدود مفروض
ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض فعلياً ان نرم عليه مثلثاً متساوي الاضلاع .



اجعل ا مركزاً و ا ب بُعداً وارسم دائرة
ب س د ثم اجعل ب مركزاً و ا ب بُعداً
وارسم دائرة ا س ر (حسب ثالثة ر
المكثات) ثم من س اي نقطة تقاطع
الدائرتين ارسم خطاً الى ا وآخر الى ب

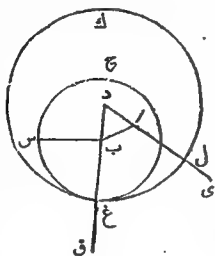
(حسب اولى المكثات) فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع

النقطة ا هي مركز الدائرة ب س وذلك الخط ا س يعدل الخط ا ب (حسب
المحد الحادي عشر) و ب مركز الدائرة ا س وذلك ب ا يعدل ب س وقد تبين
ان ا س يعدل ا ب والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها ا ب س
(اولية اولى) فلذلك ب س يعدل ا س فالخطوط الثلاثة ا ب ا س ب س هي
متساوية فيكون ا ب س مثلثاً متساوي الاضلاع وقد رُسم على ا ب وذلك ما كان
علينا ان نعله

القضية الثانية . ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة خطاً مستقيماً يعدل خطاً آخر
مستقيماً مفروضاً

لكن ا النقطة المفروضة و ب س الخط المستقيم المفروض فعلياً ان نرم من



١ خطاً يعدل ب س . من النقطة المفروضة ا رسم الخط ا ب (اولى المتضيات) وارسم على ا ب مثلثاً متساوي الاضلاع ا ب د (حسب ق ا ك ١) ثم اخرج د ب الى ق ودا الى ي (حسب ثانية المتضيات) ثم اجعل ب مركزاً و ب س بعداً وارسم دائرة س غ ح (حسب ثالثة المتضيات) واجعل د مركزاً ود غ بعداً وارسم دائرة غ ل ك فالخط ال يعدل الخط ب س

النقطة ب هي مركز الدائرة غ س ح ولذلك ب س يعدل ب غ (حد ١١) والنقطة د هي مركز الدائرة غ ل ك ولذلك الخط د ل يعدل د غ والجزء دا يعدل الجزء د ب فالبقية ال تعدل البقية ب غ (اولية ثالثة) وقد تبين ان ب س يعدل ب غ والاشياء المساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض فالخط ال يعدل الخط ب س وقد رُسم من ا النقطة المفروضة وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثالثة . ع

علينا ان نقطع من اطول خطين مستقيمين مفروضين جزءاً يعدل اقصرهما



ليكن ا ب اطول الخطين المفروضين وس افصرهما . فعلينا ان نقطع من ا ب جزءاً يعدل س . ارسم من النقطة ا خطا ات حتى يعدل س (حسب ق ا ك ١) ثم اجعل ا مركزاً وات بعداً وارسم دائرة ت ي ف (ثالثة المتضيات) فالجزء

ا ي يعدل ات (حد ١١) وات يعدل س فلذلك ا ي يعدل س (اولية اولى) وقد قُطع من ا ب اطول الخطين المفروضين وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الرابعة . نظرية

اذا عدل ضلعاً مثلث ضلعي مثلث آخر والزاوية الواقعة بين ضلعي

احدهما عدلت الواقعة بين ضلعي الآخر فالضلع الثالث من الواحد
يعدل الثالث من الآخر ويكون المثلثان متساويين والزوايتان
الآخرتان من الواحد تعدلان الاخرتين من الآخر

ليكن $اب س د$ في مثلثين والضلعا $اب اس$ من الواحد يعدلان $دي د$ ف
من الآخر كل واحد يعدل نظيره
والزاوية $ب اس$ تعدل الزاوية $ي$
 $د$ ف فيثبت القاعدة $ب س$ تعدل
القاعدة $ي ف$. والمثلث $اب س$
يعدل المثلث $دي ف$. وفيه الزوايا $ف$
ايضا متساوية اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية كل واحدة تعدل نظيرها . اي $اب$
 $س$ تعدل $دي ف$. و $اس ب$ تعدل $دي ف$.

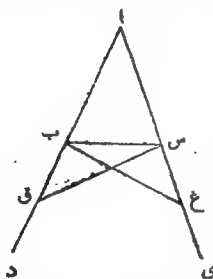
لانه اذا وضع المثلث $اب س$ على المثلث $دي ف$ حتى تقع النقطة $ا$ على النقطة
 $د$ والخط $اب$ على الخط $دي$ فالنقطة $ب$ تقع على النقطة $ي$ لان $اب$ يعدل $دي$.
واذا وقع $اب$ على $دي$ فيثبت $اس$ يقع على $دي$ لان الزاوية $ب اس$ تعدل الزاوية
 $ي د$ والنقطة $س$ تقع على النقطة $ف$ لان $اس$ يعدل $دي$. وقد تبين ان النقطة
 $ب$ تقع على النقطة $ي$ فالقاعدة $ب س$ تقع على القاعدة $ي ف$ وتعدلهما (فرع حد ٢)
وكذلك كل المثلث $اب س$ يقع على كل المثلث $دي ف$ ويكونان متساويين . والزوايتان
الآخرتان من الواحد تقع على الاخرتين من الآخر . وكل واحدة تعدل نظيرها اي
 $اب س$ تعدل $دي ف$ و $اس ب$ تعدل $دي ف$. وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

القضية الخامسة . ن

في كل مثلث متساوي الساقين الزاويتان عند القاعدة متساويتان .
واذا أُخرج الضلعان المتساويان فالزاويتان الحادثتان على الجانب
الآخر من القاعدة متساويتان ايضا
ليكن $اب س$ مثلثا متساوي الساقين اي الساق $اب$ يعدل الساق $اس$. ويخرج

الضلع اب الى د والضلع اس الى ي . فالزاوية اب س تعدل الزاوية اس ب
والزاوية س ب د تعدل الزاوية ب س ي

عين اي نقطة شئت في ب د كالنقطة ق مثلاً ومن اي اطول خطين اقطع اغ



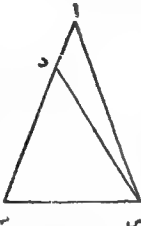
حتى يعدل اق اقصرهما (حسب ق ك ا) وارسم
الخط ق س والخط غ ب . فالخط اق يعدل اغ
وكذلك اب يعدل اس . فالخطان ق ا اس
يعدلان غ ا اب وبينها الزاوية ق اغ المشتركة
بين المثلثين اق س اغ ب فالقاعدة ق س
تعدل القاعدة غ ب (حسب ق ك ا) والمثلث
اق س يعدل المثلث اغ ب فبقية الزوايا من
الواحد تعدل بقية الزوايا من الآخر (ق ك ا)

كل واحدة تعدل نظيرها اي التي تمثاها الاضلاع المتساوية اي الزاوية اس ق
تعدل اب غ والزاوية اق س تعدل اغ ب . وقد تقدم ان اق يعدل اغ وان
اب يعدل اس فالبقية ب ق تعدل البقية س غ (اولية ثالثة) وقد تبهر ان
ق س يعدل غ ب فالضلعان ب ق ق س يعدلان الضلعين س غ غ ب وتبرهن ان
الزاوية ب ق س تعدل الزاوية س غ ب فالمثلث ب ق س يعدل المثلث س غ ب
(ق ك ا) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الآخر اي التي تقابلها
الاضلاع المتساوية اي الزاوية ق ب س تعدل الزاوية غ س ب والزاوية ب س ق
تعدل الزاوية س ب غ وقد تبهر ان كل زاوية اس ق تعدل الكل اب غ وان
الجزء ب س ق يعدل الجزء س ب غ فالبقية اس ب تعدل البقية اب س وهما
الزاويتان عند قاعدة المثلث اب س وقد تبهر ان الزاوية ق ب س تعدل غ س
ب وهما الزاويتان على الجانب الآخر من القاعدة . وذلك ما كان علينا ان نبرهنه
فرفع . اذ ذاك يكون كل مثلث متساوي الاضلاع متساوي الزوايا ايضاً

القضية السادسة . ن

اذا كانت زاويتان من مثلث متساويتين فالضلعان اللذان يقابلانها
هما متساويان ايضاً

ليكن $اب$ س مثلثاً له زاويتان $ا ب س$ $ا س ب$ متساويان فضلعاه $اب$ $اس$ هما متساويان ايضاً



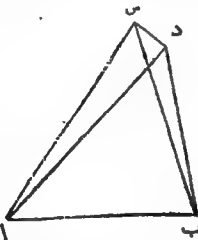
والأ فاحدها اطول من الآخر. فلنفرض $اب$ اطولها ولنقطع منه جزءاً $د ب$ يعدل $اس$ اقصرهما (ق ٢ ك ١) فلنا في المثلثين $د ب س$ $ا ب س$ ضلع من الواحد $د ب$ يعدل ضلعاً من الآخر $اس$ والقاعدة $ب س$ مشتركة بينهما فالضلعان $د ب$ $ب س$ يعدلان $اس$ $ب س$ $ب$ كل واحد نظيره. والزاوية $د ب س$ تعدل $ا ب س$ فالقاعدة $د س$ تعدل القاعدة $اب$ والمثلث $د ب س$ يعدل المثلث $ا ب س$ (ق ٤ ك ١) اي الاصغر يعدل الاكبر وذلك محال فلا يمكن ان يكون $اب$ $اس$ غير متساويين بل هما متساويان. وذلك ما كان نكينا ان نبرهنه

فرج. كل مثلث متساوي الزوايا هو متساوي الاضلاع ايضاً

القضية السابعة . ن

لا يكون على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة متساويان والمنتهيان في طرفها الآخر متساويان ايضاً

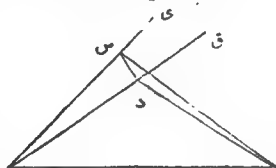
ليكن $اس ب$ $ا د ب$ مثلثين على قاعدة واحدة $اب$ وعلى جانب واحد منها والضلعان $اس$ $ا د$ المنتهيان في ا متساويان فالمنتهيان في ب الطرف الآخر من القاعدة لا يكونان متساويين



ارسم المخط $س د$ (حسب اولى المكثات) فاذا كان $ب س$ $ب د$ متساويين وكان راس احد المثلثين خارج الآخر فلنا $اس$ $ا د$ متساويان فالزاوية $اس د$ تعدل الزاوية $ا د س$ (حسب ق ٥ ك ١) والزاوية $اس د$ انما هي اكبر من الزاوية $ب س د$ فالزاوية $ا د س$ ايضاً اكبر من $ب س د$ وبالاخرى الزاوية $ب د س$ اكبر من $ب س د$ وعلى

ما فُرض ان س ب يعدل د ب فالزاوية ب د س تعدل ب س د (ق ه ك ا) وقد
تبرهن انها اكبر من ب س د

ثم اذا وقع راس احد المثلثين مثل د داخل الآخر اس ب. فاخرج اس الى
واخرج ا د الى ق فبا ان اس ا د متساويتان فالزاويتان س د ق د س
على الجانب الآخر من القاعدة س د هما متساويتان (ق ه ك ا) والزاوية س د
انما هي اكبر من الزاوية ب س د فالزاوية ق د س ايضاً اكبر من ب س د وبالاخرى
ب د س اكبر من ب س د واذا كان ب د ب س متساويين فالزاوية ب د س



تعدل الزاوية ب س د (ق ه ك ا)

وقد تبرهن ان ب د س اكبر من

ب س د وذلك محال . وهكذا اذا

وقع راس احد المثلثين بجانب الآخر

فلا يمكن ان يكون على قاعدة واحدة ب

وعلى جانب واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان الى طرف واحد من القاعدة
متساويان والمنتهيان الى طرفها الآخر متساويان ايضاً

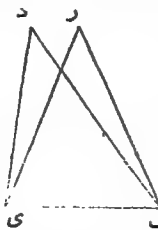


الفضية الثامنة . ن

اذا عُدل ضلعاً مثلثٍ ضلعيّ مثلثٍ آخر وكانت القاعدتان متساويتين
ايضاً فالزاوية الحادثة بين ضلعيّ الواحد تعدل الحادثة بين ضلعي
الآخر

ليكن ا ب س د ي ف مثلثين والضلعان ا ب اس يعدلان د ي د ف كل
واحد يعدل نظيره . والقاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف فالزاوية ب اس تعدل
الزاوية ي د ف

لانه اذا وضع المثلث ا ب س على المثلث د ي ف حتى تقع النقطة ب على النقطة ي
والخط ب س على الخط ي ف فالنقطة س تقع على النقطة ف لان الخط ب س يعدل



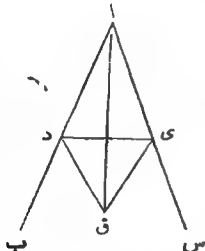
ي ف واذا ذاك فالخط ب ا
يقع على الخط ي د والخط
ا س يقع على د ف والا
فلنفرض وقوعها على ي ر
ر ف فعند ذلك يكون
على قاعدة واحدة وعلى ف

جانبيه واحد منها مثلثان الضلعان منها المنتهيان في طرف واحد من القاعدة
متساويان والمنتهيان في طرفي الآخر متساويان ايضاً وذلك لا يمكن (ق ٧ ك ١)
فاذا طبق ب س على ي ف فالخطان ب ا س يطبقان على ي د ف والزواية
ب ا س تطبق على الزاوية ي د ف ونعدلهما (اولية ٨) وذلك ما كان علينا ان نبرهنه



القضية التاسعة . ع

علينا ان ننصف زاوية بسيطة مستقيمة مفروضة اي ان نقسمها الى
قسمين متساويين



ليكن ب ا س الزاوية المفروضة ان ننصفها
عن آية نقطة شئت في الخط ا ب ك النقطة د
ومن ا س اطول خطين اقطع جزءا اى حتى
يعدل ا د اقصرهما (ق ٣ ك ١) ارم الخط د ي
واين عليه مثلثا متساوي الاضلاع د ق ي
(ق ١ ك ١) وارسم الخط ا ق فهو ينصف الزاوية
ب ا س

لان الخط ا د يعدل الخط ا ي والخط ا ق مشترك بين المثلثين د ا ق ي ا ق
فالضلعان د ا ا ق بعدلان الضلعين ي ا ا ق كل واحد يعدل نظيره. والقاعدة د ق
تعدل القاعدة ق ي فالزاوية د ا ق تعدل الزاوية ي ا ق (ق ٨ ك ١) فقد تنصفت
الزاوية ب ا س بالخط ا ق المستقيم وذلك ما كان علينا ان نعلمه

تعلية . على هذه الكيفية تنصف كلا النصفين د ا ق ي ا ق وعلى هذا النسق
نقسم زاوية مفروضة الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءا متساوية وهم جزأ

القضية العاشرة . ع

علينا ان ننصف خطاً مستقيماً محدوداً مفروضاً اي ان نقسمه الى قسمين

متساويين

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض علينا ان

ننصفه



ارسم على الخط ا ب مثلثاً متساوي الاضلاع ا س ب

(ق ا ك ا) ونصف الزاوية ا س ب بالخط المستقيم س د

(ق ا ك ا) فالخط ا ب قد اتصف في النقطة د

لأن الخط ا س يعدل س ب والخط س د مشترك بين المثلثين ا س د

ب س د فالضلعان ا س س د يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية ا س د

تعديل الزاوية ب س د فلذلك القاعدة ا د تعدل القاعدة ب د (ق ا ك ا) فقد

اتصف الخط ا ب في النقطة د وذلك ما كان علينا ان نعله

القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم محدود مفروض خطاً

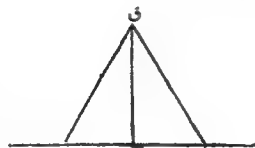
مستقيماً يحدّث مع الاول زاويتين قائمتين

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض

وس النقطة المفروضة فيه . فعلينا ان

نرسم من النقطة س خطاً مستقيماً يحدّث

مع ا ب قائمتين



ب ي س د ا

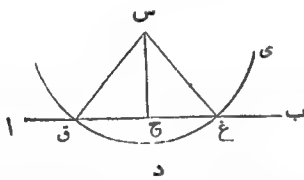
عين أية نقطة شئت في ا س كالنقطة د مثلاً ومن س ب اقطع جزءاً س ي حتى

يعدل س د (ق ا ك ا) وهي د ي ابن مثلثاً متساوي الاضلاع (ق ا ك ا) د ق ي

ثم ارسم المخط ق س فهو يُجَدِّثُ مع ا ب قائمتين
لأنَّ د س يعدل ي س والمخط ق س هو مشترك بين المثلثين د س ق
ي س ق فالضلعان د س س ق يعدلان الضلعين ي س س ق كل واحد يعدل
نظيره. والقاعدة د ق تعدل القاعدة ي ق فالزاوية د س ق تعدل الزاوية ي س ق
(ق ٨ ك ١) وهما متواليتان. وإذا قام خط مستقيم على آخر مستقيم وجعل الزاويتين
المتواليتين متساويتين فكل واحدة منهما قائمة (حد ٧) فكل واحدة من د س ق
ي س ق هي قائمة. فقد رُسم من النقطة المفروضة س خط ق س وهو يَجْدِّثُ مع
ا ب قائمتين وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خط مستقيم مفروض غير محدود
وذلك من نقطة مفروضة خارج ذلك المخط



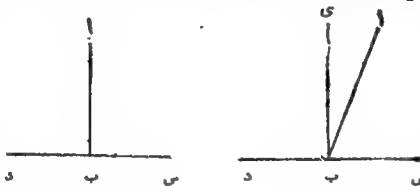
ليكن ا ب خطاً مستقيماً
يمكن اخراجه الى جهتيه الى غير
نهاية . ولكن س نقطة خارجه
فعلينا ان نرسم من س خطاً
عمودياً على ا ب

عين آية نقطة شئت على الجانب الاخر من ا ب مثل د ثم اجعل س مركزاً
وس د بعداً وارسم الدائرة ي غ ق (ثلاثة المكثات) التي تقطع ا ب في النقطتين غ
وق . نصف ق غ في ج (ق ١٠ ك ١) ثم ارسم س ج فهو عمودي على ا ب . ارسم
س ق س غ ولان ق ج يعدل ج غ والمخط س ج مشترك بين المثلثين ق ج س
غ ج س فالضلعان ق ج ج س يعدلان الضلعين غ ج ج س كل واحد يعدل
نظيره. والقاعدة س ق تعدل القاعدة س غ (حد ١١) فالزاوية ق ج س تعدل
الزاوية غ ج س (ق ٨ ك ١) وهما متواليتان . فالمخط س ج عمودي على ا ب (حد ٧)
وقد رُسم من النقطة المفروضة س وذلك ما كان علينا ان نعلمه

القضية الثالثة عشرة . ن

الزاويتان الحادثتان من وقوع خط مستقيم على آخر مستقيم على جانب واحد منه هما قائمتان او تعدلان قائمتين

ليقع الخط المستقيم ا ب على الخط المستقيم د س حتى تحدث الزاويتان ا ب د ا ب س فهما قائمتان او تعدلان قائمتين



فاذا كان ا ب د ا ب س متساويتين فهما قائمتان (٧٥) والا فمن النقطة ب

ارسم الخط ب ي س عمودياً على د س (ق ١١ ك ١) فالزاويتان ي ب د ي ب س قائمتان والزاوية س ب ي تعدل س ب ا مع ا ب ي اضعف الى كل واحدة منها الزاوية ي ب د فالزاويتان س ب ي ي ب د تعدلان الثلاث الزوايا س ب ا ا ب ي ي ب د (اولية ٢) والزاوية د ب ا تعدل د ب ي مع ي ب ا اضعف الى كل واحدة منها ا ب س فالزاويتان د ب ا ا ب س تعدلان الثلاث د ب ي ي ب ا ا ب س وقد تبين ان د ب ي س ب ي تعدل هذه الثلاث الزوايا ايضاً. والاشياء المماوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض (اولية ١) اي الزاويتان س ب ي د ب ي تعدلان الزاويتين د ب ا ا ب س ولكن س ب ي ي ب د هما قائمتان فالزاويتان د ب ا ا ب س تعدلان قائمتين

فرغ . مجتمع جميع الزوايا الحادثة على جانب واحد من د س يعدل قائمتين لانه يعدل مجتمع الخواطين د ب ا ا ب س

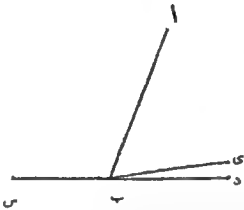


القضية الرابعة عشرة . ن

اذا وقع خطان مستقيمان على نقطة واحدة من خط آخر مستقيم عن

جانبه واحدا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين فالخطان على استقامة واحدة كأنها خط واحد

ليقع خطان س ب د ب على النقطة ب من الخط ا ب من جانبه وليعدنا زاويتين متواليتين تعدلان قائمتين ا ب س ا ب د فالخطان س ب ب د على استقامة واحدة كأنها خط واحد



والأفارم ب ي حتى يكون س ب ب ي على استقامة واحدة فالخط المستقيم ا ب الواقع على خط آخر مستقيم س ي على جانب واحد منه يحدث زاويتين ا ب س ا ب ي تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١)

ولكن قد فرض ان ا ب س ا ب د تعدلان قائمتين فالزاويتان ا ب س ا ب ي تعدلان ا ب س ا ب د اطرح الزاوية المشتركة ا ب س فالباقية ا ب ي تعدل الباقية ا ب د (اولية ٢) اي الجزء يعدل الكل وذاك محال فلا يمكن ان يكون س ب ب ي على استقامة واحدة. وهكذا في كل خط غير ب د فالخطان س ب ب د المحدثان مع ا ب زاويتين تعدلان قائمتين هما على استقامة واحدة وذلك ما كان علينا ان نبرهنه

— ١٠٠٤ —

القضية الخامسة عشرة . ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان فالزوايا المتقابلة متساوية

ليكن ا ب خطاً مستقيماً وليقطعه خط آخر س د في النقطة ي فالزاوية س ي ا تعدل ب ي د والزاوية س ي ب تعدل ا ي د لان الزاويتين س ي ا ا ي د

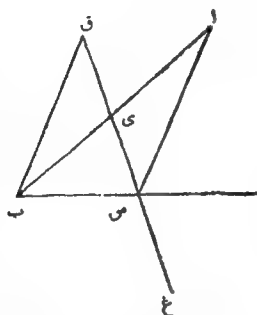
المحاذتين من وقوع ا ي على س د تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) و ا ي د د ي ب المحاذتان من وقوع د ي على ا ب ايضا تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان

س ي ا اى د تعدلان اى د دى ب اطرح المشتركة اى د فالباقية س ي ا
تعدل الباقية دى ب (اولية ٢) وهكذا ايضا يبرهن ان س ي ب تعدل اى د
فرع أول يتضح من هذه القضية ان مجموع جميع الزوايا الحادثة من تقاطع
خطين مستقيمين يعدل اربع زوايا قائمة
فرع ثانٍ مجموع الزوايا الحادثة من تقاطع خطوط مستقيمة في نقطة واحدة
يعدل اربع زوايا قائمة



القضية السادسة عشرة . ن

اذا أخرجَ ضلعٌ مثلثٍ فالزاوية الخارجة الحادثة من ذلك هي
أكبر من احدى الداخلتين المتقابلتين

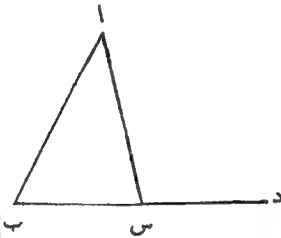


ليكن ق ب س مثلثا ولخرج الضلع
ب س الى د فالزاوية الخارجة ق س د هي
أكبر من احدى الداخلتين المتقابلتين
س ب ق ب ق س
نصف ق س في ي (ق ا ك ا)
ارسم ب ي واخرجه الى ا واجعل ي ا
يعدل ب ي (ق ا ك ا) وارسم اس
واخرج ق س الى غ

لأن ق ي يعدل ي س وب ي يعدل ي ا فالخطان ق ي ي ب يعدلان
اى ي س كل واحد يعدل نظيرة. والزاوية ق ي ب تعدل اى س (ق ه ا ك ا)
فالقاعدة ق ب تعدل القاعدة اس (ق ا ك ا) والمثلث ق ي ب يعدل المثلث
اى س وبية الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الآخر. يعني التي تقابلها
الاضلاع المتساوية فالزاوية ب ق ي تعدل الزاوية ي س ا والزاوية ي س د اى
ق س د هي أكبر من ي س ا فهي ايضا أكبر من ب ق ي اوب ق س وعلى هذا
النسق اذا نُصِف ب س يبرهن ان الزاوية ب س غ اوق س د (ق ه ا ك ا)
هي أكبر من ق ب س

القضية السابعة عشرة . ن

زاويتان من مثلث هما معاً اصغر من قائمتين



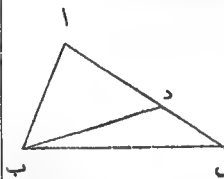
ليكن اب س مثلثا فزاويتان منه
معاً اصغر من قائمتين

اخرج ب س الى د فالزاوية
الخارجة اس د هي اكبر من الداخلة
اب س (ق ١٦ ك ١) اضع الى كل
واحدة منها اس ب فالزاويتان اس د

اس ب معاً اكبر من اب س اس ب معاً ولكن اس د اس ب معاً تعذلان
قائمتين (ق ١٣ ك ١) واذا كانا فالزاويتان اب س اس ب معاً اصغر من قائمتين .
وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان اب اس اس ب معاً و س اب اب س معاً اصغر
من قائمتين

القضية الثامنة عشرة . ن

الضلع الاطول من كل مثلث تقابله الزاوية الكبرى

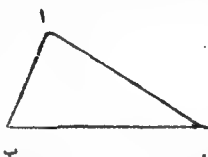


ليكن اب س مثلثا وليكن الضلع اس اطول
من الضلع اب فتكون الزاوية اب س اكبر
من الزاوية ب س ا

من اس اقطع ا د حتى يعدل اب (ق ٢ س)
ك ١ وارسم ب د ففي المثلث ب د س الزاوية الخارجة ا د ب هي اكبر من الداخلة
د س ب ولكن ا د ب تعدل اب د (ق ٥ ك ١) فالزاوية ا د ب ايضاً اكبر من
د ب س وبالاخرى اب س اكبر من د س ب ا ي اس ب

القضية التاسعة عشرة . ن

الزاوية الكبرى من كل مثلث يقابلها الضلع الاطول



ليكن $اب$ س مثلثا ولكن الزاوية $اب$ س
أكبر من $اس$ ب فيكون الضلع $اس$ أطول من
 $اب$ والآ فالضلع $اس$ يعدل $اب$ او هو اقصر
منه ولا يمكن ان يعدل $اب$ لانه عند ذلك
كانت الزاويتان $اس$ ب $اب$ س متساويتين (ق ٥ ك ١) وقد فرض ان $اب$ س
أكبر من $اس$ ب ولو كان اقصر لكانت $اب$ س اصغر من $اس$ ب (ق ٨ ك ١)
فبالضرورة يكون $اس$ أطول من $اب$

القضية العشرون . ن

ضلعان من مثلث هما معا أطول من ضلعه الثالث



ليكن $اب$ س مثلثا فضلعان منه معا $د$
أطول من ضلعه الثالث . اي الضلعان
 $ب ا$ $اس$ معا أطول من $ب س$ و $اب$
 $ب س$ معا أطول من $اس$ و $ب س$ $ا$
معا أطول من $اب$

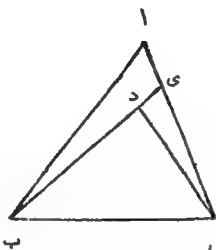
أخرج $ب ا$ الى $د$ واجعل $اد$ يعدل $اس$ (ق ٢ ك ١) وارسم $د س$ فها
ان $اد$ يعدل $اس$ فالزاوية $اد س$ تعدل $اس د$ (ق ٥ ك ١) و $ب س د$ هي
أكبر من $اس د$ فهي ايضا أكبر من $اد س$ فيكون الضلع $ب د$ أطول من $ب س$
(ق ٩ ك ١) ولكن $ب د$ يعدل $ب ا$ مع $اس$ فالضلعان $ب ا$ $اس$ معا أطول من
 $ب س$ وهكذا في كل ضلعين من اضلاع المثلث

تعليقة . يبرهن ذلك بدون اخراج ضلع من المثلث لان $ب س$ هو البعد
الاقرب بين النقطة $ب$ والنقطة $س$ فيكون $ب س$ اقصر من $ب ا$ $اس$ اي $ب ا$
 $اس$ معا أطول من $ب س$

القضية الحادية والعشرون . ن

اذا رُسِمَ من طرفي ضلع مثلث خطان مستقيمان الى نقطة داخل المثلث

فها اقصر من ضلعي المثلث الآخرين ولكن يحيطان بزاوية اكبر من
التي بين الآخرين

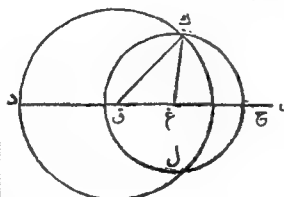


ليكن ا ب س مثلثا. وليرسم من طرفي ب س
خطان الى النقطة د داخل المثلث مثل ب د
س د فها اقصر من ب ا ا س ولكن الزاوية
ب د س هي اكبر من ب ا س. اخرج ب د
الى ي. فالضلعان ب ا ا ي معان المثلث ب ا ي
هما اطول من ب ي (ق ٢٠ ك ١) اصف

لما ي س فالضلعان ب ا ا س اطول من ب ي ي س وفي المثلث س ي د
الضلعان س ي ي د هما معا اطول من س د. اصف لهما د ب فالضلعان س ي
ي ب معا اطول من س د د ب وقد تبرهن ان ب ا ا س هما معا اطول من ب ي
ي س فبالاخرى ب ا ا س اطول من ب د د س ثم الزاوية الخارجة ب د س من
المثلث س د ي هي اكبر من الداخلة س د ي (ق ١٦ ك ١) ولذا هذا السبب
س ي د هي اكبر من ي ا ب ا س ا ب وقد تبرهن ان س د ب هي اكبر من
س ي ب فبالاخرى هي اكبر من س ا ب

القضية الثانية والعشرون. ع

علينا ان نرسم مثلثا اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة
وكل اثنين منها معا اطول من الثالث



ليكون ا ب وس الخطوط المستقيمة
المفروضة كل اثنين منها معا اطول من
الثالث. فعلينا ان نرسم مثلثا اضلاعه
تعدل هذه الخطوط الثلاثة

خذ خطا مستقيما ينتهي في نقطة د
وغير محدود من جهة ي واقطع منه
د ق حتى يعدل ا (ق ٢٠ ك ١) وق غ حتى

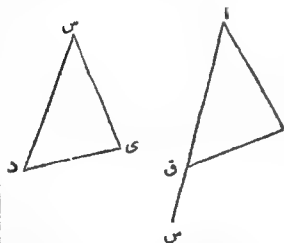
ا —————
ب —————
س —————

• يعدل ب و غ ح حتى يعدل س ثم اجعل ق مركزاً وق د بُعْداً (ثلاثة الممكنات)
 وارسم دائرة د كل واجعل غ مركزاً و غ ح بُعْداً وارسم دائرة ك ح ل (ثلاثة الممكنات)
 ومن ك اي نقطة تقاطع الدائرتين ارسم ك ق ك غ فالمثلث ق ك غ هو المطلوب
 واضلاعه تعدل الخطوط الثلاثة المفروضة ا و ب و س . فقد جعلنا ق غ حتى يعدل
 ب ومن حيث ان النقطة ق في مركز الدائرة د كل فالخط ق ك يعدل ق د
 (حدا ١) ولكن ق د يعدل ا فالخط ق ك يعدل ا ايضاً . ومن حيث ان النقطة
 غ في مركز الدائرة ك ح ل فالخط غ ح يعدل غ ك (حدا ١) ولكن غ ح يعدل
 س ولذلك غ ك يعدل س ايضاً فقد رُسم مثلث اضلاعه تعدل ثلاثة خطوط
 مستقيمة مفروضة

تعلية لو كان احد الاضلاع اطول من مجمع الآخرين لما تقاطعت الدائرتان
 والنقطة صحيحة كل ما كان مجمع ضلعين اطول من الثالث

الفضية الثالثة والعشرون. ع

علينا ان نرسم من نقطة مفروضة في خط مستقيم مفروض زاوية
 مستقيمة بسيطة حتى تعدل زاوية اخرى مستقيمة بسيطة مفروضة

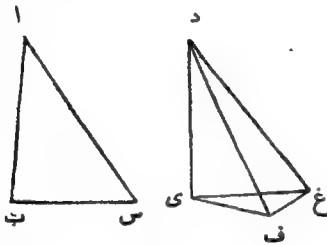


ليكن ا س الخط المستقيم المفروض
 والنقطة المفروضة منه د س ي الزاوية
 البسيطة المفروضة فعلينا ان نرسم من
 النقطة ا زاوية بسيطة تعدل د س ي
 في س د عيّن اية نقطة شئت مثل د . غ
 كذلك عيّن ي في س ي . ا رسم د ي
 وارسم المثلث ا ق غ حتى يعدل المثلث

س د ي (ق ٢٢ ك ١) اي الضلع ا ق يعدل س د والضلع ا غ يعدل س ي والضلع
 ق غ يعدل د ي فها ان الضلعين ق ا غ يعدلان د س ي والزاوية ق غ
 تعدل الزاوية د ي فالزاوية ق ا غ تعدل الزاوية د س ي (ق ٨ ك ١) وقد رُسمت
 من النقطة ا في الخط المفروض ا س

الفضية الرابعة والعشرون . ن

في مثلثين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين من الآخر وكانت
الزاوية المحاذية بين ضلعي الاول اكبر من المحاذية بين ضلعي الآخر
فالذي له الزاوية الكبرى له ايضا القاعدة الطولى

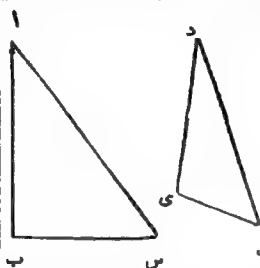


ليكن ا ب س د ي ف
مثلثين ولنفرض ان الضلع
ا ب يعدل د ي والضلع ا س
يعدل د ف ولكن الزاوية
ب ا س اكبر من ي د ف
فتكون القاعدة ب س اطول
من القاعدة ي ف

ليكن د ف اطول من د ي ومن النقطة د ارم الزاوية ي د غ حتى تعدل
ب ا س (ق ٢٣ ك ١) واجعل د غ يعدل ا س او د ف ارم ي غ ف غ
فمن حيث ان ا ب يعدل د ي و ا س يعدل د غ والزاوية ب ا س تعدل
ي د غ فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ي غ (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان د ف يعدل
د غ فالزاوية د ف غ تعدل د غ ف (ق ٥ ك ١) ولكن الزاوية د غ ف هي اكبر من
ي غ ف فتكون د غ ايضا اكبر من ي غ ف فكم بالاحرى تكون ي غ ف اكبر
من ي غ ف وفي المثلث ي غ ف فمن حيث ان الزاوية ي غ ف هي اكبر من ي غ ف
فيكون الضلع ي غ اطول من ي ف (ق ١٩ ك ١) ولكن ي غ يعدل ب س
فالقاعدة ب س اطول من القاعدة ي ف

الفضية الخامسة والعشرون . ن

اذا عدل ضلعاً مثلث ضلعي مثلث آخر ولكن كانت قاعدة احدها
اطول من قاعدة الآخر فالزاوية الكبرى هي لذي القاعدة الطولى

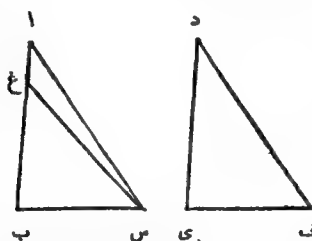


ليكن ا ب س د ي ف مثلين
ولنفرض ان ضلعين من الواحد ا ب
ا س عدلا ضلعين من الآخر د ي
د ف ولكن القاعدة ب س اطول من
القاعدة ي ف فتكون الزاوية ب ا س
اكبر من الزاوية ي د ف والا فاما ان

تعديلا او تكون اصغر منها فالزاوية ب ا س لا تعدل ي د ف لانه عند ذلك كانت
القاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف (ق ٤ ك) وقد فرض ب س الاكبر ولا يمكن
ان تكون اصغر منها لانه عند ذلك كانت القاعدة ب س اصغر من ي ف (ق ٤ ج)
ك (ا) وقد فرض ب س اكبر وقد تبين انها لا تعديلا فبالضرورة تكون الزاوية
ب ا س اكبر من الزاوية ي د ف

القضية السادسة والعشرون . ن

اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر اي كل
واحدة عدلت نظيرها . وضع من الواحد عدل ضلعا من الآخر
ان كانا المتواليين للزاويا المتساوية او المتقابلين لها فالضلعان الآخران
من الواحد يعدلان الآخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد
تعدل الثالثة من الآخر



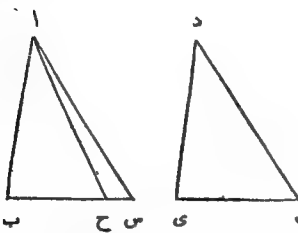
ليكن ا ب س د ي ف مثلين
والزاوية ا ب س فلتعدل د ي ف
والزاوية ب س ا فلتعدل ي ف د
والضلع ب س فليعدل ي ف وهما
المتواليان للزاويا المتساوية
فالضلعان الآخران من الواحد

ا ب س يعدلان الآخرين من الآخر د ي د ف والزاوية الثالثة من الواحد

ب اس تعدل الثالثة من الاخرى د ف

وان لم يكن ا ب و دى متساويين فبالضرورة يكون احدهما اطول من الآخر
فلنفرض ا ب الاطول ولنصل منه ب غ حتى يعدل دى (ق ٢ ك ١) ولنرسم غ س
فمن حيث ان غ ب يعدل دى و ب س يعدل دى ف فالضلعان غ ب ب س
يعدلان الضلعين دى دى ف كل واحد يعدل نظيره والزوايا غ ب س تعدل
دى ف فالقاعدة غ س تعدل القاعدة د ف (ق ٢ ك ١) والمثلث غ ب س يعدل
المثلث دى ف وبقيت الزوايا من الواحد تعدل بقية الزوايا من الآخر كل واحدة
تعدل نظيرها اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية. فالزوايا غ ب س تعدل دى
وقد فرض ان دى ف تعدل اس ب فالزوايا غ ب س ايضا تعدل اس ب اي
الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ا ب و دى غير متساويين
ايها متساويان و ب س يعدل دى ف فالضلعان ا ب ب س يعدلان الضلعين
دى دى ف والزوايا ا ب س تعدل دى ف فالقاعدة ا س تعدل القاعدة د ف
(ق ٢ ك ١) والزوايا ب اس تعدل الزوايا دى دى ف

ثم لنفرض مساواة الضلعين اللذين يقابلان الزوايا المتساوية في كلا المثلثين
يعني ان ا ب يعدل دى ف فعلى هذا المفروض ايضا لنا مساواة بقية الاضلاع يعني
اس يعدل دى ف و ب س يعدل دى ف والزوايا الثالثة من الواحد ب اس تعدل
الثالثة من الاخرى دى دى ف



فان لم يكن ب س و دى ف
متساويين فليكن ب س اطولهما .
افصل منه ب ح حتى يعدل
د (ق ٢ ك ١) ودرسم ا ح فمن
حيث ان ب ح يعدل دى ف و ا
ب يعدل دى ف فالضلعان ا ب

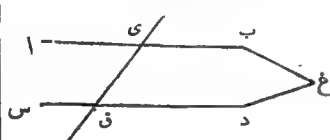
ب ح يعدلان الضلعين دى دى ف والزوايا ا ب ح تعدل دى ف فالقاعدة ا ح
تعدل القاعدة د ف (ق ٢ ك ١) والمثلث ا ب ح يعدل المثلث دى ف وبقيت
الزوايا ايضا متساوية ايضا اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية فالزوايا ب ح ا تعدل
دى ف ولكن دى ف د تعدل ب س ا فالزوايا ب س ا تعدل ب ح ا اي الزوايا

الخارجة اح ب تعدل الداخلة المتقابلة اس ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١) فلا
يمكن ان يكون ب س وى ف غير متساويين ايها متساويان و ا ب يعدل دى
فالضلعان ا ب ب س يعدلان دى ي ف والزاوية ا ب س تعدل دى ف
فالقاعدة اس تعدل القاعدة د ف والزاوية الثالثة ب اس تعدل الثالثة ي د ف



القضية السابعة والعشرون . ن

اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين آخرين مستقيمين وجعل الزاويتين
المتبادلتين متساويتين فالخطان متوازيان



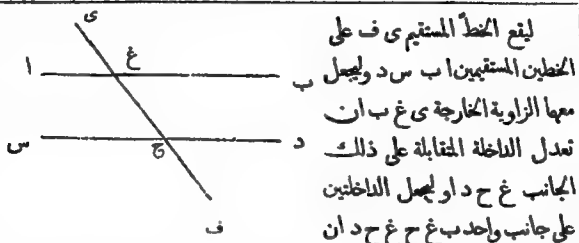
ليقع الخط المستقيم ي ق على
الخطين المستقيمين ا ب س د
وليجعل معها الزاويتين المتبادلتين
اي ق ي ق د متساويتين فالخطان
ا ب س د متوازيان

والا فيلتبها اذا اخرجنا . فلنفرض التقاءها في النقطة غ فيكون غ ي ق مثلثا
وزاويته الخارجة اى ق تكون اكبر من الداخلة المتقابلة ي ق غ (ق ١٦ ك ١) وقد
فُرض مساويتها فلا تكون احدهما اكبر من الاخرى فلا يلتقي ا ب وس د اذا اخرجنا
الى جهة ب ود وهكذا يبرهن انها لا يلتقيان اذا اخرجنا الى جهة ا وس فما اذا
متوازيان (حد ٣٠)



القضية الثامنة والعشرون . ن

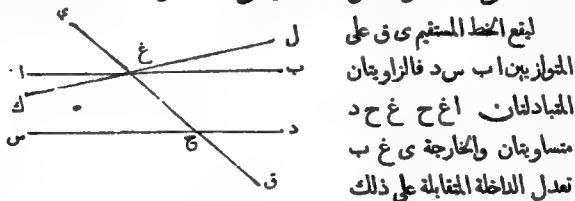
اذا وقع خطٌ مستقيم على خطين مستقيمين واحداث زاوية خارجة
تعدل الداخلة المتقابلة على جانب واحد منه او داخليتين على جانب
واحد منه تعدلان معا قائمتين فالخطان متوازيان



ليقع الخط المستقيم ϵ ف على
 الخطين المستقيمين ab و d وليجعل
 معها الزاوية الخارجة γ ب a
 تعدل الداخلة المتقابلة على ذلك
 الجانب γ ح d او ليجعل الداخلتين
 على جانب واحد γ ح d ان
 تعدلا قائمتين فالخطان ab و d متوازيان. فمن حيث ان γ ب a تعدل γ ح d
 وتعدل ايضا α ح d (ق ١٥ ك ١) فالزاوية α ح d تعدل γ ح d وهما متبادلتان
 ولذلك (ق ٢٧ ك ١) ab يوازي d وايضا من حيث ان γ ب a ح d تعدلان
 قائمتين حسب المفروض و α ح d ب a ح d تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان
 ب a ح d و α ح d ب a ح d تعدلان ب a ح d ح d اطرح المشتركة ب a ح d فالباقية α ح
 تعدل الباقية γ ح d وهما متبادلتان. ولذلك ab و d متوازيان
 فرع. اذا ان كان خطان مستقيمان عموديين على خط مستقيم ثالث فها متوازيان

القضية التاسعة والعشرون.

اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين متوازيين فالزاويتان
 المتبادلتان الحادتان متساويتان والزاوية الخارجة تعدل الداخلة
 المتقابلة على جانب واحد والداخلتان على جانب واحد تعدلان قائمتين



ليقع الخط المستقيم ϵ ف على
 المتوازيين ab و d فالزاويتان
 المتبادلتان α ح d و γ ح d
 متساويتان والخارجة γ ب
 تعدل الداخلة المتقابلة على ذلك
 الجانب γ ح d و الداخلتان على جانب واحد ب a ح d و γ ح d تعدلان قائمتين
 فان لم تكن α ح d و γ ح d متساويتين فليدبرم الخط $ك$ حتى ان $ك$ ح d تعدل
 γ ح d واخرج $ك$ ح d الى $ل$ فالخط $ك$ ل يوازي d (ق ٢٧ ك ١) و ab ايضا

بولاري س د فقد رُسم خطان مستقيمان ماران بنقطة واحدة غ بولاريان س د من غير ان يتطابقا وذلك محال (اولية ١١) فلا تكون الزاويتان اغ ح غ ح د غير متساويتين اي هما متساويتان . والزاوية ي غ ب تعدل اغ ح (ق ١٥ ك ١) ولذلك ي غ ب ايضا تعدل غ ح د (اولية اولى) اصف اليها ب غ ح فالزاويتان ي غ ب ب غ ح تعدلان ب غ ح غ ح د ولكن ي غ ب ب غ ح تعدلان قائمتين (ق ١٣ ك ١) ولذلك ب غ ح غ ح د تعدلان قائمتين ايضا

فرع اول اذا جعل الخطان كل س د مع ي ق الزاويتين ك غ ح غ ح س معا صغر من قائمتين فالخطان ك غ ح س يلتقيان على ذلك الجانب من ي ق الذي فيه كانت الزاويتان اصغر من قائمتين

والا فها متوازيان . او يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ي ق ولكنها غير متوازيين . والا لكانت ك غ ح غ ح س معا تعدلان قائمتين ولا يلتقيان على الجانب الاخر من الخط ي ق والا لكانت ل غ ح غ ح د زاويتين من زوايا مثلث واصغر من قائمتين وذلك لا يمكن لان الاربع زوايا ك غ ح غ ح ل س ح غ ح د تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٣ ك ١) واثنان منها اي ك غ ح غ ح س هـ بالمفروض اصغر من قائمتين فبالضرورة الاخران ل غ ح غ ح د اكبر من قائمتين فمن حيث ان كل س د غير متوازيين ولا يلتقيان من جهة ل ود فبالضرورة يلتقيان اذا اُخرجا الى جهة ك وس

فرع ثانٍ اذا كانت ب غ ح قائمة تكون غ ح د ايضا قائمة فالخط العمودي على احد خطين متوازيين هو عمودي على الاخر ايضا

فرع ثالث من حيث ان اغ ي = ب غ ح و د ح ق = س ح غ تكون الاربع الزوايا الحادة اغ ي ب غ ح س ح غ د ح ق متساوية . وهكذا الاربع الزوايا المنفرجة ي غ ب اغ ح غ ح د س ح ق هي ايضا متساوية . واذا اُضيفت احدى الحادّات الى احدى المنفرجات فالجموع يعدل قائمتين

تعليقة الزوايا المذكورة لما اما مختلفة باعتبار نسبة بعضها الى بعض فالزاويتان ب غ ح غ ح د هـ اللاتختان على جانب واحد وكذلك اغ ح غ ح س . والزاويتان اغ ح غ ح د هـ اللاتختان الحادّتان او المتبادلتان فقط . وكذلك ب غ ح غ ح س . والزاويتان ي غ ب غ ح د هـ الخارجة واللاخلة وكذلك ي غ اغ ح س

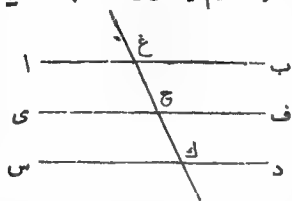
والزاويتان ي غ ب س ح ق هما الخارجتان المتبادلتان وكذلك ا غ ي د ح ق

— ١٠٠١ —

الفضية الثلاثون . ن

المخطوط المستقيمة المتوازية لخط واحد مستقيم هي متوازية بعضها البعض

ليكن المخططان ا ب س د متوازيين
للخط ي ق فيها متوازيان ايضاً
ليقع على ا ب ي ف س د الخط
المستقيم غ ح ك فمن حيث ا ب ي ف
متوازيان فالزاوية ا غ ح تعدل الزاوية



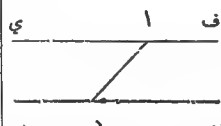
غ ح ف (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ن ي ف س د متوازيان فالزاوية غ ح ف
تعدل غ ح ك د (ق ٢٩ ك ١) وقد تبين ان ا غ ح تعدل غ ح ف فلذلك ا غ ح
تعدل غ ح ك د ايضاً وهما متبادلتان فالخط ا ب يوازي الخط س د (ق ٢٧ ك ١)

— ١٠٠٢ —

الفضية الحادية والثلاثون . ع

علينا ان نرسم خطاً مستقيماً يمر في نقطة مفروضة ويوازي خطاً مستقيماً
مفروضاً

ليكن ا النقطة المفروضة وب س الخط
المستقيم المفروض . علينا ان نرسم خطاً مستقيماً
يوازي ب س ويمر بالنقطة ا

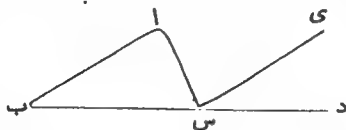


عين ا بة نقطة شئت في ب س كالنقطة د مثلاً . ارسم ا د وفي النقطة ا من
الخط ا د ارسم الزاوية د ا ي واجعلها ان تعدل الزاوية ا د س (ق ٢٣ ك ١)
واخرج ي ا الى ف

فمن حيث ان الخط المستقيم ا د يلاقي الخطين المستقيمين ي ف ب س ويجعل
معها الزاويتين المتبادلتين ي ا د ا د س متساويتين فالخط ي ف يوازي ب س
(ق ٢٧ ك ١) وقد رُسم حتى يمر في النقطة ا المفروضة .

القضية الثانية والثلاثون . ن

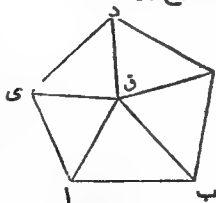
اذا اُخرج ضلع من اضلاع مثلث فالزاوية الخارجة تعدل الداخلتين المتقابلتين . والزوايا الثلاث الداخلة من كل مثلث تعدل قائمتين



ليكن ا ب س مثلثا
وليجر من الضلع ب س الى
فالزاوية الخارجة اس د تعدل
الداخلتين المتقابلتين س ا ب

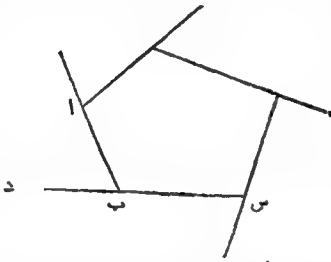
ا ب س والزوايا الثلاث الداخلة ا ب س ب س ا س ا ب معا تعدل قائمتين
من النقطة س ارم الخط المستقيم س ي حتى يوازي ا ب (ق ٢١ ك ١) فمن
حيث ان الخط ا س يلاقي الخطين المتوازيين ا ب س ي فالزاويتان المتبادلتان
ا س ي ب ا س متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان ب د يلاقي المتوازيين
ا ب س ي فالزاوية الخارجة ي س د تعدل الداخلة المتقابلة ا ب س وقد نبرهن
ان ا س ي تعدل ب ا س فكل الخارجة اس د تعدل الداخلتين المتقابلتين ب ا س
ا ب س . اضع الى هذه الزوايا الزاوية ا س ب فالزاويتان ا س د ا س ب تعدلان
الثلاث الزوايا ا ب س ب ا س ا س ب ولكن ا س د ا س ب معا تعدلان قائمتين
(ق ١٢ ك ١) فالزوايا الثلاث ا ب س ب ا س ا س ب ايضا تعدل قائمتين

فرع اول جميع الزوايا الداخلة في كل شكل ذي اضلاع مستقيمة تعدل من
الزوايا القائمة ما يمثل مضاعف عدد اضلاع الشكل الا اربع زوايا قائمة



لان كل شكل ذي اضلاع مستقيمة مثل
ا ب س ي ق ينقسم الى مثلثات تماثل عدد اضلاع
برسم خط مستقيم من كل زاوية الى نقطة داخلة
مثل ق فحسب هذه القضية زوايا كل مثلث
تعدل قائمتين فجميع زوايا جميع المثلثات تعدل

قائمتين في عدد اضلاع الشكل ولكن الزوايا عند ق تعدل اربع زوايا قائمة (ق ١٥ ك ١ فرع ٢) فزوايا الشكل تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل الا اربع زوايا قائمة



فرع ثانٍ مجنec الزوايا
الخارجة من كل شكل ذي
اضلاع مستقيمة يعدل اربع زوايا
قائمة . لان كل زاوية داخلية
ا ب س مع الخارجة المتواليه
ا ب د تعدل قائمتين (ق ١٢ ك ١)
فجميع الداخلة مع جميع الخارجة

تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل والداخلة تعدل قائمتين في عدد اضلاع الشكل
الاربع قائمات حسب الفرع الاول فالخارجة تعدل اربع قائمات

فرع ثالث اذا فرضت زاويتان من زوايا مثلث او مجنecها فتستعلم الثالثة
بطرح المجنec من قائمتين

فرع رابع اذا عدلت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر فالثالثة من
الواحد تعدل الثالثة من الآخر والمثلثان متساويا الزوايا

فرع خامس لا يكون في مثلث اكثر من زاوية واحدة قائمة . لانه لو كانت
له قائمتان لكانت الثالثة لا شيء . وبالاخرى لا يكون لمثلث اكثر من زاوية واحدة
منفرجة

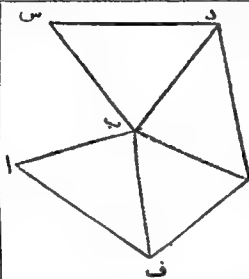
فرع سادس في كل مثلث قائم الزاوية مجنec الحادتين يعدل قائمة

فرع سابع من حيث ان كل مثلث متساوي الاضلاع هو متساوي الزوايا
ايضا (فرع ق ٥ ك ١) فكل زاوية من زواياه تعدل ثلث قائمتين او ثلثي قائمة

فرع ثامن مجنec زوايا ذي اربعة اضلاع يعدل قائمتين في ٤ - ٢ اي اربع
قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة قائمة وذلك يؤيد الحد الخامس
والعشرين والسادس والعشرين

فرع تاسع مجنec زوايا ذي خمسة اضلاع يعدل قائمتين في ٥ - ٢ اي ست
قائمات فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة خمس ست قائمات اي ٦ قائمة

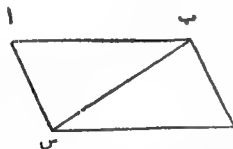
فرع عاشر مجنec زوايا ذي ستة اضلاع يعدل ٢ (٦ - ٢) اي ثمان قائمات
فاذا كانت زواياه متساوية تكون كل واحدة سدس ثمان قائمات اي ٨ قائمة



تعلية متى استعمل الفرع الاول في اشكال كثيرة الاضلاع لما زوايا متداخلة مثل اب س فيجب ان تحسب كل متداخلة أكبر من قائمتين وإذا رُسم ب د ب ي ب ف ينقسم الشكل الى اربع مثلثات لما غايي ي قائمتان اي قائمتان في عدد الاضلاع اثنتين

القضية الثالثة والثلاثون . ن

المخطان المستقيمان الموصولان بين اطراف خطين مستقيمين متوازيين متساويين هما متوازيان ومتساويان



ليكن اب وس د خطين مستقيمين متساويين متوازيين وليوصل بين اطرافها بالمخطين المستقيمين اس ب د فهذان المخطان ايضا متوازيان ومتساويان

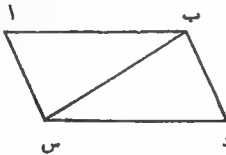
ارسم ب س فن حيث ان ب س يلاقي المخطين المتوازيين اب س د فالزاويتان المتبادلتان اب س ب س د هما متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ومن حيث ان اب يعدل س د والمخط ب س مشترك بين المثلثين اب س ب س د فالضلعان اب ب س يعدلان الضلعين ب س س د والزاوية اب س تعدل ب س د فالقاعدة اس تعدل القاعدة ب د (ق ٤ ك ١) وبقيت الزوايا من الواحد تعدل بقيت الزوايا من الآخر اي اس ب تعدل س ب د . ومن حيث ان المخط ب س يلاقي المخطين اس ب د ويجعل الزاويتين المتبادلتين اس ب ب س د متساويتين فالمخطان اس ب د متوازيان (ق ٢٧ ك ١) وقد تبهرن انها متساويان فرع اول في كل شكل ذي اربعة اضلاع اذا كان ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين يكون الضلعان الآخران كذلك ويكون الشكل ذا اضلاع متوازية فرع ثان كل ذي اربعة اضلاع ضلعاه المتقابلان متساويان هو ذو اضلاع متوازية

فرع ثالث في كل ذي اربعة اضلاع اذا كانت الزوايا المتقابلة متساوية .
تكون الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية

القضية الرابعة والثلاثون . ن

في شكل ذي اضلاع متوازية الاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة هي
متساوية . والقطر ينصفه اي يقسمه الى جزئين متساويين

ليكن ا ب د س متوازي الاضلاع وب س قطره فالاضلاع المتقابلة والزوايا
المتقابلة متساوية والقطر ب س ينصفه
فن حيث ان الخط ب س يلاقي الخطين
المتوازيين ا ب س د فالزاويتان المتبادلتان
ا ب س ب س د متساويتان (ق ٢٩ ك ١) د



وايضاً لان ب س يلاقي المتوازيين ا ب س د فالمتبادلتان ا س ب ب س د
متساويتان (ق ٢٩ ك ١) ففي المثلثين ا ب س ب س د زاويتان من الواحد تعدلان
زاويتين من الآخر والضلع ب س مشترك بين المثلثين فالضلعان الاخران من الواحد
يعدلان الضلعين الاخرين من الآخر والزاوية الثالثة من الواحد تعدل الثالثة من
الآخر (ق ٢٦ ك ١) اي ا ب يعدل س د و ا س يعدل ب د والزاوية ب ا س
تعدل س د ب ولان الزاوية ا ب س تعدل ب س د و ا س ب تعدل س ب د
فكل الزاوية ا ب د تعدل كل الزاوية ا س د وقد تبرهن ان ب ا س تعدل
ب د س فالزوايا المتقابلة والاضلاع المتقابلة من ذي اضلاع متوازية هي متساوية
وايضاً القطر ينصفه لان ا ب يعدل س د وب س مشترك بين المثلثين والزاوية
ا ب س تعدل ب س د فالمتثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) وقد اتصف الشكل بالقطر

فرع اول خطان متوازيان بين خطين متوازيين متساويان

فرع ثان خطان متوازيان هما على بعد واحد بعضهما من بعض ابداً

فرع ثالث مجموع زاويتين متواليتين من ذي اضلاع متوازية يعدل قائمتين

القضية الخامسة والثلاثون . ن

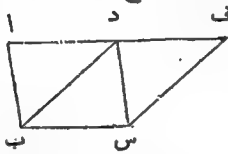
اشكال ذات اضلاع متوازية على قاعدة واحدة وبين خطين

متوازيين هي متساوية

انظر الشكل الثاني والثالث

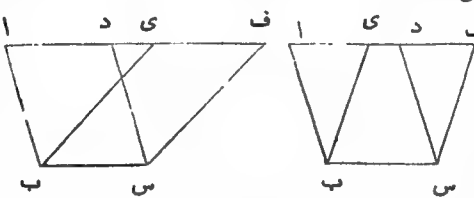
ليكن ا ب س د وى ب س ف شكليين متوازيي الاضلاع على قاعدة واحدة

ب س و بين خطين متوازيين ا ف ب س ف
فالشكل ا ب س د يعدل الشكل
ى ب س ف . اذا انتهى الضلعان ا د ف
من الشكليين ا ب س د د ب س ف



المتقابلان للقاعدة ب س في نقطة واحدة د فالامر واضح ان كل واحد من الشكليين
انما هو مضاعف المثلث ب س د (ق ٢٤ ك ١) واذا كانا متساويين وان لم يتوفا
نقطة واحدة الضلعان ا د ى ف من الشكليين ا ب س د ى ب س ف المتقابلان
للقاعدة ب س

فتم من ف د ى ا ف
حيث ان
ا ب س د
متوازيين
الاضلاع



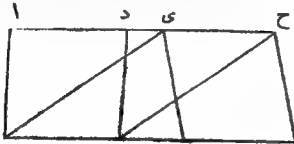
فالضلع ا د يعدل ب س (ق ٢٤ ك ١) ولهذا السبب ايضا ى ف يعدل ب س
ولذلك ا د يعدل ى ف (اولية اولى) و دى مشترك فالكل او البقية اى يعدل
الكل او البقية د ف (اولية ثانية وثالثة) و ا ب يعدل د س فالضلعان ى ا ا ب
يعدلان الضلعين ف د د س كل واحد يعدل نظيره والزوايا الخارجة ف د س
تعدل للاخاذه المتقابلة ى ا ب (ق ٢٦ ك ١) فالقاعدة ى ب تعدل القاعدة ف س
والمثلث ى ا ب يعدل المثلث ف د س (ق ٤ ك ١) اطرح المثلث ف د س من
الشكل ا ب س ف واطرح منه ايضا ى ا ب فتكون البقايا متساوية (اولية ٢) اى
الشكل ا ب س د يعدل الشكل ى ب س ف

القضية السادسة والثلاثون

اشكال ذات اضلاع متوازية على قواعد متساوية وبين خطين

متوازيين هي متساوية

ليكن ا ب س د وى ف غ ح شكليين متوازيي الاضلاع على قاعدتين



متساويتين ب س و ف غ و بين

خطين متوازيين ا ح و ب غ فيها

متساويان

ارسم بى و س ح ف غ

حيث ان ب س يعدل ف غ و ف غ يعدل حى ح (ق ٢٤ ك ١) فلذلك حى ح

يعدل ب س ايضاً وهما متوازيان وقد اوصل بينها الى جهة واحدة بالخطين بى

س ح والمخطوط الموصلة بين خطين متوازيين متساويين الى جهة واحدة هي متوازية

ومتساوية (ق ٢٣ ك ١) فالخطان بى س ح متساويان متوازيان والشكل

بى ح س متوازي الاضلاع وهو يعدل الشكل ا ب س د (ق ٢٥ ك ١) لانها

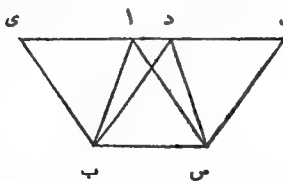
على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س ا ح ولهذا السبب ايضاً

الشكل حى ف غ ح يعدل بى س ح فالشكلان ا ب س دى ف غ ح متساويان

القضية السابعة والثلاثون . ن

مثلثات على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين هي متساوية

ليكن ا ب س د ب س مثلثين على قاعدة واحدة ب س وبين خطين



متوازيين ا د و ب س فيها متساويان

اخرج ا د الى الجهتين الى ف

وى ومن ب ا ر م بى حتى يوازي

ا س (ق ٢١ ك ١) ومن س ا ر م س ف

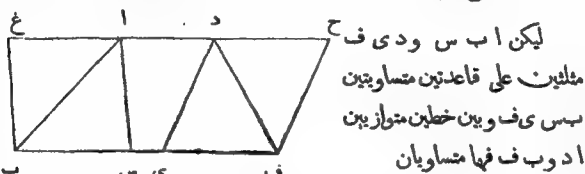
حتى يوازي ب د فكل واحد من الشكلين اى ب س د ب س ف متوازيين

الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٥ ك ١) لانها على قاعدة واحدة ب س وبين خطين

متوازيين ي ف و ب س والمثلث ا ب س هو نصف الشكل ا ي ب س لان
القطر ا ب بنصفه (ق ٢٤ ك ١) والمثلث د ب س هو نصف الشكل د ب س ف
لان القطر د س بنصفه وانصاف اشياء متساوية هي متساوية بعضها لبعض (اولية ٧)
فالمثلث ا ب س يعدل المثلث د ب س

القضية الثامنة والثلاثون . ن

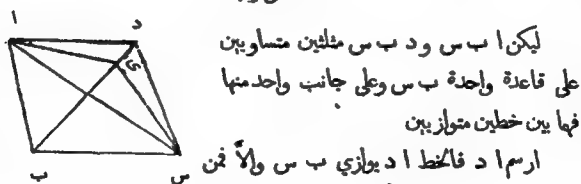
مثلثات على قواعد متساوية وبين خطين متساويين هي متساوية



اخرج ا د الى الجهتين الى ح و غ وارسم ب غ حتى يوازي ا س (ق ٢١ ك ١)
ومن ف ارسم ف ح حتى يوازي د ي فكل واحد من الشكلين ا غ ب س
د ي ف ح متوازي الاضلاع وهما متساويان (ق ٢٦ ك ١) لانها على قاعدتين
متساويتين ب س ي ف وبين خطين متوازيين غ ح ب ف والمثلث ا ب س هو
نصف الشكل ا ب غ س (ق ٢٤ ك ١) لان القطر ا ب بنصفه ود ي ف هو نصف
الشكل د ي ف ح (ق ٢١ ك ١) لان القطر د ف بنصفه وانصاف اشياء متساوية هي
متساوية (اولية ٧) فالمثلث ا ب س يعدل المثلث د ي ف

القضية التاسعة والثلاثون . ن

مثلثات متساوية على قاعدة واحدة وعلى جانب واحد منها هي بين
خطين متوازيين

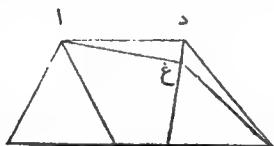


النقطة ا رسم اى حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) وارسم ى س فالمثلث ا ب س يعدل المثلث ى ب س (ق ٢٧ ك ١) لانها على قاعدة واحدة ب س وبين خطين متوازيين ب س اى والمثلث ا ب س يعدل د ب س فالمثلث ى ب س يعدل د ب س اى الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يمكن ان يكون ب س واى متوازيين وهكذا يبرهن في كل خط الا الخط ا د فهو يوازي ب س

—١٥٥—

الفضية الاربعون . ن

مثلثات متساوية على قواعد متساوية وعلى جانب واحد منها هي بين خطين متوازيين اذا كانت القواعد على استقامة واحدة
ليكن ا ب س دى ف مثلثين متساويين على قاعدتين متساويتين وعلى



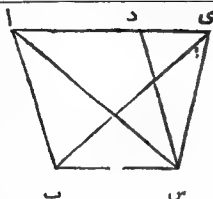
استقامة واحدة ب س ى ف وعلى جانب واحد منها فهما بين خطين متوازيين

ارسم ا د فهو يوازي ب ف والا ف فارسم ا غ حتى يوازي ب ف (ق ٢١ ك ١) وارسم غ ف فالمثلث ا ب س يعدل المثلث غ ى ف (ق ٢٨ ك ١) لانها على قاعدتين متساويتين ب س ى ف وبين خطين متوازيين ب ف ا غ ولكن المثلث ا ب س يعدل المثلث دى ف فلذلك المثلث دى ف يعدل المثلث غ ى ف اى الاكبر يعدل الاصغر وذاك محال فالخط ا غ لا يوازي ب ف وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا ا د فهو يوازي ب ف

—١٥٦—

الفضية الحادية والاربعون . ن

اذا كان شكل ذو اضلاع متوازية ومثلث على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فالشكل مضاعف المثلث
ليكن الشكل ذو الاضلاع المتوازية ا ب س د والمثلث ى ب س على قاعدة



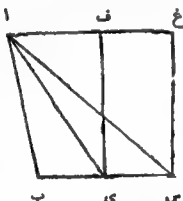
سواءة ب س وبين خطين متوازيين اى ب س
فالشكل ا ب س د مضاعف المثلث ا ب س
ارسم اس فالمثلث ا ب س يعدل المثلث
ا ب س (ق ٢٧ ك ١) لانها على قاعدة واحدة
ب س وبين خطين متوازيين اى ب س ولكن
الشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث ا ب س (ق ٢٤ ك ١) لان النظر ا س
ينصفه فالشكل ا ب س د هو مضاعف المثلث ا ب س ايضاً

القضية الثانية والاربعون. ع

علينا ان نرمم شكلاً اذا اضلاع متوازية حتى يعدل مثلثاً مفروضاً

وزاوية من زواياه تعدل زاوية مستقيمة بسيطة مفروضة

ليكن ا ب س المثلث المفروض ود الزاوية البسيطة المفروضة علينا ان نرمم
شكلاً اذا اضلاع متوازية حتى يعدل المثلث
ا ب س وزاوية من زواياه تعدل



نصف ب س في اى (ق ١٠ ك ١)
ارسم اى ومن النقطة اى في الخط المستقيم
اى س اجعل الزاوية س اى ف تعدل

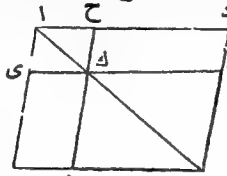
د (ق ٢٢ ك ١) ومن ا رسم ا غ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن س رسم
س غ حتى يوازي اى ف فالشكل س اى ف غ متوازي الاضلاع. فمن حيث ان
ب اى يعدل اى س فالمثلث ا ب اى يعدل المثلث اى س (ق ٢٨ ك ١) لانها على
قاعدتين متساويتين ب اى س وبين خطين متوازيين ا غ ب س ولذلك
المثلث ا ب س هو مضاعف المثلث اى س والشكل ف اى س غ ايضاً مضاعف
المثلث اى س (ق ٤١ ك ١) لانها على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين ف اى س غ
ف اى س غ يعدل المثلث ا ب س وله الزاوية س اى ف التي تعدل الزاوية المفروضة د
فرج. اذا كانت الزاوية د قائمة يكون الشكل ف اى س غ قائم الزوايا ويعدل
المثلث ا ب س فبذلك هذا العمل يصنع مثلث حتى يعدل شكلاً مفروضاً وزاياه قائمة

القضية الثالثة والاربعون . ن

الاجزاء الممتدة لاشكال متوازية الاضلاع واقعة على جانبي قطر شكل

متوازي الاضلاع هي متساوية

ليكن ا ب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس قطره وى ح وغ ف شكلين متوازي الاضلاع على جانبي القطر اس وليكن



ب ك وك د الشكلين الآخرين المتبين لكل ف الشكل ا ب س د فالتم ب ك يعدل المم ك د

فن حيث ان ا ب س د متوازي الاضلاع

واس قطره فالتلك ا ب س يعدل التلك

ا د س (ق ٢٤ ك ١) ومن حيث ان اى ك ح متوازي الاضلاع فالتلك اى ك

يعدل التلك ا ح ك ولهذا السبب ايضاً التلك ك غ س يعدل التلك ك ف س

فالتلك اى ك مع ك غ س يعدل التلك ا ح ك مع ك ف س والكل ا ب س

يعدل الكل ا د س فالبقية ب ك تعدل البقية ك د (اولية ٢)

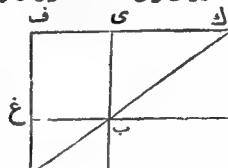
— ١٠٠١ —

القضية الرابعة والاربعون . ع

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً متوازي الاضلاع حتى

يعدل مثلثاً مفروضاً وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب المخط المستقيم المفروض وس التلك المفروض ود الزاوية المفروضة.



علينا ان نرسم على الخط

ا ب شكلاً متوازي

الاضلاع حتى يعدل سى

وزاوية من زواياه تعدل د

ارسم الشكل المتوازي ل

الاضلاع بى ف غ حتى يعدل التلك س (ق ٤٢ ك ١) واجعل الزاوية

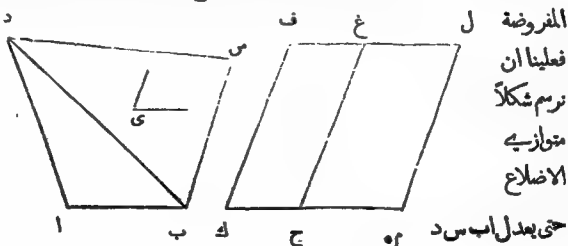
بى غ منه تعدل الزاوية د واجعل ضلعه بى به والمخط ا ب على استقامة

واحدة واخرج ف غ الى ح ومن ا ارم ح حتى يوازي ب غ اوى ف (ق ١٢١ ك ١)
 وارم ح ب. فن حيث ان المخط المستقيم ف يلاقي المتوازيين ح ا ف ي فالزاويتان
 ا ح ف ح ف ي معاً تعدلان قائمتين (ق ١٢٩ ك ١) فالزاويتان ب ح ف ح ف ي
 معاً هما اقل من قائمتين ولا بد من التقاء ح ب وف ي اذا اخرجنا (ق ١٢٩ ك ١)
 فرع ا) اخرجها حتى يلتقيا في ك ومن ك ارم ك ل حتى يوازي ي اوف ح واخرج
 ح ا الى ل واخرج غ ب الى م فالشكل ح ل ك ف متوازي الاضلاع وقطره ح ك
 والشكلان ا غ وم ي هما متوازي الاضلاع على جانبي التطرح ك. ول ب وب ف
 هما المتان فالتم ل ب يعدل الم ب ف (ق ١٤٣ ك ١) ولكن ب ف يعدل المثلث
 س فالشكل ل ب يعدل المثلث س ايضاً والزاوية غ ب ي تعدل الزاوية ا ب م
 (ق ١٥ ك ١) ولكن ي ب غ تعدل الزاوية د فالزاوية ا ب م تعدل د ايضاً فالشكل
 ل ب قدرُسم على المخط المفروض ا ب حتى يعدل المثلث المفروض س والزاوية
 ا ب م منه تعدل الزاوية المفروضة د

فرع ث. على هذا الاسلوب بقول مثلث الى شكل ذي زوايا قائمة مفروض طول
 ضلع من اضلاعه. لانه اذا كانت د قائمة و ا ب الضلع المفروض فالشكل ا ب م ل
 يكون ذا زوايا قائمة ويعدل المثلث المفروض س

القضية الخامسة والاربعون. ع

علينا ان نرسم شكلاً متوازي الاضلاع حتى يعدل شكلاً مفروضاً ذا
 اضلاع مستقيمة وزاوية من زواياه تعدل زاوية بسيطة مفروضة
 لكن ا ب س د الشكل المفروض ذا اضلاع مستقيمة وى الزاوية البسيطة



وزاوية من زوايا تعدل الزاوية

ارسم د ب ثم ارم الشكل المتوازي الاضلاع ف ح (ق ٤٢ ك ١) حتى يعدل المثلث ا د ب واجعل الزاوية ح ك ف منه تعدل الزاوية ي وعلى الخط المستقيم غ ح ارم الشكل المتوازي الاضلاع غ م (ق ٤٤ ك ١) واجعله يعدل المثلث د ب س والزاوية غ ح م تعدل الزاوية ي

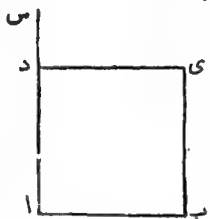
فمن حيث ان الزاوية ي تعدل الزاويتين ف ك ح غ ح م فالزاوية ف ك ح تعدل غ ح م. اصف الى كل واحدة منها الزاوية غ ح ك فالزاويتان غ ح م غ ح ك تعدلان الزاويتين ف ك ح غ ح ك ولكن ف ك ح ك ح غ معاً تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) فلذلك ك ح غ غ ح م تعدلان قائمتين فمن حيث ان الخط غ ح يجعل مع ك ح م الزاويتين المتواليتين تعدلان قائمتين فالخطان ك ح ح م هما على استقامة واحدة (١٤ ك ١) ومن حيث ان الخط المستقيم غ ح يلاقي المتوازيين ك م ف غ فالزاويتان المتبادلتان م ح غ ح غ ف متساويتان (ق ٢٩ ك ١) اصف الى كل واحدة منها الزاوية ح غ ل فالزاويتان م ح غ ح غ ل تعدلان الزاويتين ح غ ف ح غ ل ولكن م ح غ ح غ ل تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١) ولذلك ح غ ف ح غ ل تعدلان قائمتين. فالخطان ف غ غ ل هما على استقامة واحدة. ومن حيث ان ك ف يوازي ح غ و ح غ يوازي ل م فالخط ك ف يوازي الخط ل م (ق ٣٠ ك ١) والخط ك م يوازي ل م فالشكل ك م ل ف متوازي الاضلاع. والمثلث ا ب د يعدل الشكل ح ف والمثلث د ب س يعدل الشكل غ م فالك ل ا ب س د يعدل الكل ك ف ل م. فقد رُسم شكل متوازي الاضلاع ك م ل ف حتى يعدل الشكل المفروض ا ب س د والزاوية ف ك م منه تعدل الزاوية المفروضة ي

فرع. على هذا الاسلوب يُبنى على خط مستقيم مفروض شكل متوازي الاضلاع لة زاوية تعدل زاوية مفروضة وهو يعدل شكلاً مفروضاً ذا اضلاع مستقيمة اي يبنى أولاً على الخط المفروض شكلاً متوازي الاضلاع يعدل المثلث الاول ا ب د (ق ٤٤ ك ١) وزاوية من زوايا تعدل الزاوية المفروضة

القضية السادسة والاربعون . ع

علينا ان نرسم مربعاً على خط مستقيم مفروض

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض . علينا ان نرسم عليه مربعاً



من النقطة ا ارسم الخط اس عموداً على ا ب

(ق ١١ ك ١) واقطع ا د حتى يعدل ا ب (ق ٢ ك ١)

ومن د ارسم د ي حتى يوازي ا ب (ق ٣١ ك ١)

ومن ب ارسم ب ي حتى يوازي ا د فالشكل

ا د ي ب متوازي الاضلاع والخط ا ب يعدل

د ي والخط ا د يعدل ب ي (ق ٢٤ ك ١) ولكن

ا ب يعدل ا د فالخطوط الاربعة ا ب ا د د ي ب ي هي متساوية والشكل المتوازي

الاضلاع ا ب ي د هو متساوي الاضلاع ايضاً وزواياه قائمة لان ا د الذي يلاقي

المتوازيين د ي ا ب يجعل الزاويتين ب ا د ا د ي تعدلان قائمتين (ق ٢٩ ك ١)

وقد جعلت ب ا د قائمة فتكون ا د ي ايضاً قائمة وفي كل شكل ذي اضلاع متوازية

تكون الزوايا المتقابلة متساوية (ق ٢٤ ك ١) فالزاويتان ا ب ي ب ي د هما ايضاً

قائمتان فالشكل ذو زوايا قائمة وقد تبرهننت مساواة الاضلاع وقد رُسم على الخط

المفروض ا ب

فرع . كل ذي متوازي الاضلاع له قائمة واحدة تكون جميع زواياه قائمات

القضية السابعة والاربعون . ن

في كل مثلث ذي قائمة مربع الوتر يعدل مربعي الساقين

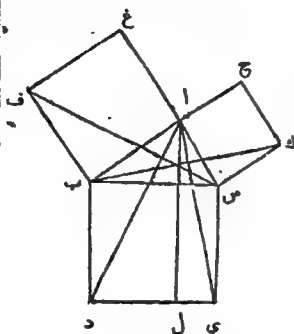
ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س فربّع الوتر ب س يعدل مربع ا ب مع

مربع ا س

ارسم على ب س المربع ب د ي س (ق ٤٦ ك ١) وعلى ب ا المربع ب غ و على

ا س المربع س ح ومن ا ارسم ا ل حتى يوازي ب د ا و س ي (ق ٣١ ك ١) ارسم ا د

و ف س . الزاوية ب ا س قائمة وب ا غ كذلك (حده ٢٥) فالخط المستقيم ب ا



يجعل من الخطبين المستقيمين اس ا غ
الزاويتين المتواليين ب ا س ب ا غ
تعدلان قائمتين فالخططان على استقامة
واحدة (ق ١٤ ك ١) ولهذا السبب
الخطاط ب ا ح ايضا على استقامة
واحدة. والزاوية د ب س تعدل الزاوية
ف ب ا لانهما قائمتان. اصف الى كل
واحدة ا ب س فكل الزاوية د ب ا تعدل

الكل ف ب س (أولية ٢) والضلعان ا ب د يعدلان الضلعين ف ب ب س كل واحد يعدل نظيره . والزاوية ا ب د تعدل الزاوية ف ب س فالقاعدة ا د تعدل القاعدة ف س (ق ٤ ك ١) والمثلث ا ب د يعدل المثلث ف ب س. والشكل المتوازي الاضلاع ب ل هو مضاعف المثلث ا ب د (ق ١ ك ١) لانها على قاعدة واحدة ب د وبين خطين متوازيين ب د ا ل. والمربع ب غ هو مضاعف المثلث ف ب س لانها على قاعدة واحدة ب ف وبين خطين متوازيين ب ف غ س والاشياء المضاعفة اشياء متساوية هي متساوية (أولية ٦) فالشكل ب ل يعدل المربع ب غ. وهكذا اذا رُسم ب ك و اى يبرهن ان الشكل س ل يعدل المربع ح س فكل المربع ب دى س يعدل المربعين ب غ و ح س

فرع أول. مربع ساق مثلث ذي قائمة يعدل مربع الوتر الأربعة الساق الآخر
أي $a^2 = b^2 + c^2$

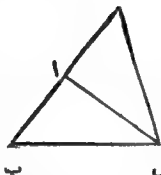
فرع ثان. اذا فرض $اب = اس$ اي اذا كان $اب$ س متساوي الساقين فلنا
 $ب س = ا ب = ا ب و ب س = ا ب ٢$

فرع ثالث . في مثلين قائي الزاويتين اذا عدل ضلعان من الواحد ضلعين
من الآخر فالضلع الثالث من الواحد يعدل الثالث من الآخر

القضية الثامنة والاربعون . ن

اذا عدل مربع ضلع مثلث مربعي الضلعين الآخرين فالمثلث قائم الزاوية

ليكن ا ب س مثلثا ولنفرض ان مربع ب س يعدل مربعي ب ا س فتكون ب ا س قائمة



من ا ارم ا د عمودا على ا س (ق ١١ ك ١)

واجعل ا د يعدل ا ب وارسم د س

فمن حيث ان د ا يعدل ا ب فمربع د ا يعدل

مربع ا ب اضف الى كل واحد منها مربع ا س فمربع د ا

مع مربع ا س يعدل مربع ب ا مع مربع ا س ولكن مربع د س يعدل مربع د ا مع

مربع ا س (ق ١٧ ك ١) لان د ا س قائمة وحسب المفروض مربع ب س يعدل مربع

ب ا مع مربع ا س فمربع د س يعدل مربع ب س والضلع د س يعدل الضلع ب س

ولان د ا يعدل ا ب و ا س مشترك بين المثلثين د ا س ب ا س والقاعدة ب س

تعدل القاعدة د س فالزاوية د ا س تعدل الزاوية ب ا س (ق ١٨ ك ١) و د ا س

قائمة فتكون ب ا س قائمة ايضا

مضافات الى الكتاب الاول

قضية ا . ن

الخط العمودي هو اقصر الخطوط التي يمكن رسمها من نقطة خارجة

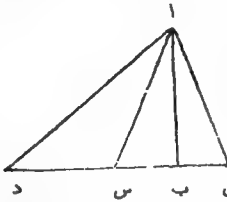
عن خط مفروض الى ذلك الخط وكل خطين مائلين واقعين على

جانبي العمود خارجين من نقطة واحدة وفاصلين جزئين متساويين

من الخط الذي يقعان عليه متساويان ومن كل خطين آخرين

مائلين فاصلين جزئين غير متساويين فابعدهما عن العمود اطولهما

ليكن اب اس اد الى اخره الخطوط المرسومة من النقطة المفروضة ا الى



المخط المستقيم غير المحدود دى وليكن اب عموداً فهو اقصر من اس واس اقصر من اد ولم جراً. لأن الزاوية اب س قائمة فالزاوية اس ب حادة (ق ١٧ ك ١) واصغر من اب س والزاوية الصغرى من كل مثلث

يقابلها الضلع الاقصر (ق ١٩ ك ١) فالضلع اب اقصر من الضلع اس. ثم اذا كان ب س وب ي متساويين يكون المثلثان اس اى متساويين ايضاً. لأن الزاوية اب س = اب ي والضلع اب مشترك بين المثلثين اب س اب ي فالمثلثان متساويان (ق ٤ ك ١) والضلع اس = اى. ولأن الزاوية اس ب حادة فالزاوية اس د منفرجة لانها معاً تعدلان قائمتين (ق ٢ ك ١) والزاوية اد س حادة لان اب د قائمة فالزاوية اس د هي اكبر من اد س فالضلع اد اطول من الضلع اس (ق ١٩ ك ١)

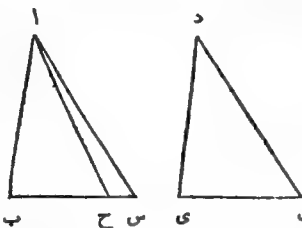
فرع اول. العمود هو قياس حقيقي للبعد بين نقطة وخط لانه البعد الاقرب بينها

فرع ثان. كل نقطة في عمود على نقطة اتصاف خط في على بعد واحد من طرفي المخط

فرع ثالث. من نقط واحد لا يمكن رسم ثلاثة خطوط متساوية الى خط واحد والا لكان خطان مائلان متساويان على جانب واحد من العمود وذاك لا يمكن

قضيه ب. ن

اذا عدل وتر مثلث قائم الزاوية وساق من ساقه وتر مثلث آخر قائم الزاوية وساقاً من ساقه فالمثلثان متساويان لنفرض الوتر اس = د ف والضلع اب = دى فالمثلث القائم الزاوية اب س



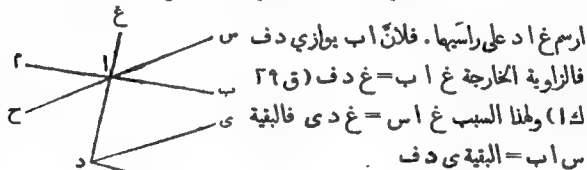
= القائم الزاوية دى ف. فلو قُرِضت
مساواة الضلع الثالث منها لكانت
مساواة المثلثين ظاهرة. وإن لم يكن
الضلعان الآخران متساويين فنخذ
جزءاً من ب س مثل ب ح
يعدل دى ف (ق ٢ ك ١) ارسم ا ح ف

فالمثلث ا ب ح = دى ف (ق ٢ ك ١) لأن ا ب = دى و ب ح = دى ف والزاوية
ا ب ح = دى ف لانها قائمتان فلذلك ا ح = د ف ولكن قد قُرِض ان ا س =
د ف فالنتيجة ان ا ح = ا س ولكن حسب القضية الماضية الأبعد عن العمود هو
اطول من الاقرب اليه فلا يمكن ان ا ح = ا س ولا يمكن ان ب س لا يعدل دى ف
فالمثلثان ا ب س دى ف متساويان

قضية ج. ن

إذا كان ضلعاً زاويةً موازيين ضلعي زاوية أخرى وكان انفراجهما الى
جهة واحدة فالزاويتان متساويتان

لنفرض ان ا ب يوازي د ف و ا س يوازي دى فالزاوية س ا ب = دى ف.



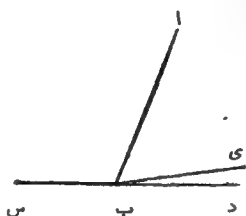
فرع. إذا أخرج ب ا الى م وس الى ح ف

فلنا ب ا س = ح ا م وإذا ذاك فالزاوية ح ا م = دى ف أيضاً

تعليقة. يلزم حصر القضية بشرط انفراج الخطبتين الى جهة واحدة لأن في
الزاوية س ا م س ا يوازي دى ف و ا م يوازي د ف ولكن الزاويتان غير متساويتين
وس ا م و دى ف تعدلان قائمتين

قضية د. ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وعلينا ان نجد الثالثة



ارسم خطاً مستقيماً مثل س د وفي نقطة
 منه مثل ب اجعل الزاوية س ب ا
 تعدل واحدة من الزاويتين المفروضتين
 والزاوية ا ب د تعدل الاخرى فالباقية
 س ب د تعدل الثالثة لان هذه الثلاث
 الزوايا تعدل قائمتين (فرع ق ١٢ ك ١)

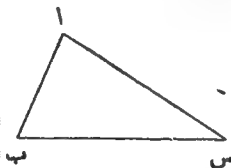
— ١٠٥ —

قضية ه. ع

مفروض زاويتان من زوايا مثلث وضع من اضلاعه فعلينا ان نرسم
 المثلث

الزاويتان المفروضتان تكونان المتواليتين لضع المفروض او تكون احدهما
 متوالية له والاخرى متقابلة له . ففي الحالة الثانية استعمل الثالثة حسب القضية الماضية
 فتكون هي الاخرى المتوالية

ثم ارسم المخطط المستقيم ب س حتى يعدل الضلع المفروض وعند ب اجعل
 الزاوية س ب ا تعدل احدى المتواليتين
 وعند س اجعل الزاوية ب س ا تعدل
 الاخرى المتوالية فالخطان ب ا ب س
 يتقاطعان ويحدث من ذلك المثلث المفروض



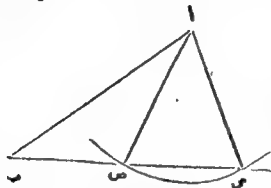
لانه لو كانا متوازيين لكانت الزاويتان عند ب وس تعدلان معاً قائمتين ولم تكونا
 زوايا مثلث فبالضرورة يكون ا ب س المثلث المطلوب

— ١٠٦ —

قضية و.ع

مفروض ضلعان من اضلاع مثلث وزاوية متقابلة لاجدهما فعلينا ان
نرسم المثلث

لهذه العمدة حالتان احدهما متى كانت الزاوية المفروضة منفرجة . اجعل الزاوية



ب ص ا تعدل المفروضة ثم اجعل
ص ا يعدل الضلع الذي يوالي الزاوية
المفروضة فلو جعلت النقطة ا مركزاً
والضلع الاخر اي اب بعداً ورسم قوس
لنقطعت ب س على جانبي ص فلا يمكن

ان يرسم اكثر من مثلث واحد ذي زاوية منفرجة على هذه الكيفية وهو المثلث
ب ص ا

ولو كانت المفروضة قائمة لرسم مثلثان لكن كان الوتران ينقطعان ب س على
بعد واحد على جانبي العمود فكان المثلثان متساويين

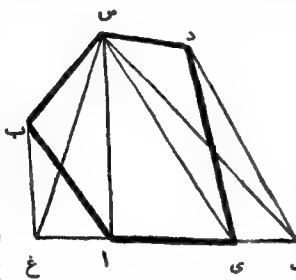
الحالة الثانية متى كانت الزاوية المفروضة حادة والضلع المتقابل اطول من
التوالي فالعمل فيها كما تقدم . اجعل ب س ا تعدل المفروضة واس يعدل الضلع
التوالي ثم اجعل ا مركزاً والضلع الآخر طويلاً فاذا كان طول ا ب فالقوس تقطع
ب س في ب . ارسم ا ب فيكون ب ا س المثلث المطلوب واذا كانت المفروضة
حادة والضلع المتقابل اقصر من الآخر فاجعل ب س ا تعدل المفروضة واجعل
ب ا يعدل الضلع المفروض التوالي ثم اجعل ا مركزاً واس بعداً فالقوس تقطع
ب س في س وص على جانب واحد من ب فيحدث مثلثان ب ا ص ب ا س
وكل واحد منها مستوفٍ شروط العمل

تعلية . في هذه الحالة الاخيرة لو كان طول الضلع الاقصر طول العمود من ا
الى ب س لحدث مثلث قائم الزاوية . ولو كان ذلك الضلع اقصر من العمود من ا
على ب س لكانت المسئلة غير ممكنة في كل الاحوال

قضية ز. ع

علينا ان نجد مثلثا يعدل شكلاً مفروضاً ذا اضلاع مستقيمة

ليكن ا ب س دى الشكل المفروض . ارم القطر س دى الذي ينصل من



الشكل المثلث س دى . ارم د ف

حتى يوازي س دى واخرج اى الى ف

ثم ارم س ف فالشكل ا ب س دى

يعدل الشكل ا ب س ف لأن المثلثين

س دى س دى س ف دى هما على قاعدة

واحدة س دى وبين خطين متوازيين

س دى د ف فهما متساويان (ق ٢٧ ك ١) ف

ثم ارم القطر س ا وارسم ب غ حتى يوازي س ا واخرج اى الى غ وارسم س غ

فالشكل ا ب س دى قد تحوّل الى مثلث يعدله س ف

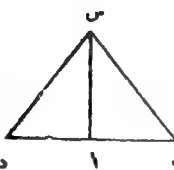
فرج . من حيث ان المثلث يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله

فبالضرورة كل ذي اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله

—•••—

قضية ح. ع

علينا ان نستعلم ضلع مربع يعدل مجموع مربعين



ارسم خطين غير محدودين مثل ا ب ا س احدهما

عمودي على الآخر . ثم اقطع ا ب حتى يعدل ضلعاً من

احد المربعين المفروضين واس الآخر . ارم ب س

فلان ب ا س قائمة فربع ب س = مربع ب ا مع مربع

ا س (ق ٤٧ ك ١)

تعلية . هكذا يرسم مربع يعدل مجموع اى مربعات فُرِضت وذلك بتحويل

ثلاثة منها الى اثنين واثنين الى واحد وهم جراً

قضيه ط . ع

علينا ان نجد ضلع مربع يعدل فضله مربعين مفروضين

ارسم كما في القضية السابقة اس ا د احدهما عموداً على الاخر واجعل اس
يعدل ضلع اصغر المربعين ثم اجعل س مركزاً وضلع المربع الاخر بعداً وارسم قوساً
تقطع ا د في د فالربع المرسوم على ا د يعدل فضله مربعي س د واس لان د اس
قائمة واد = س د - اس (ق ٤٧ ك ا فرع اول)

قضيه ي . ع

مفروض شكل ذو زوايا قائمة وعلينا ان نرسم آخر مثله ضلع
مفروض

ليكن اى ق ح الشكل المفروض . اخرج ضلعاً من اضلاعه مثل ا ج حتى
يصير ح ب على الطول المفروض . اخرج اى
وارسم ب ق واخرجه حتى يلاقي اى في د ثم
اخرج د ق واجعل ق غ يعدل ح ب وارسم
ب غ س وج ق ك حتى يوازي ا د ومن د
ارسم د ك س حتى يوازي ا ب او دى غ
فالشكل غ ق ك س يعدل ا ح ق دى (ق ٤٢ س
ك ا) وله ق غ الضلع المفروض

فرع . شكل ذو اضلاع كثيرة يمكن تحويله الى شكل ذي زوايا قائمة يعدله
وله ضلع مفروض

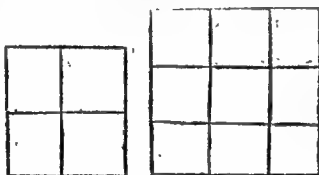
اصول الهندسة

الكتاب الثاني

محدود

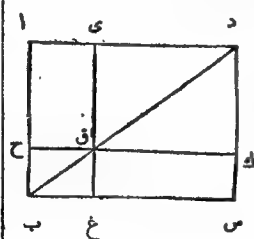
١ كل شكل متوازي الاضلاع قائم الزوايا يُعبر عنه بالضلعتين المحيطين
بأحدى قائمات الشكل اس المتوازي الاضلاع القائم الزوايا يسمى القائم الزوايا
الذي يحيط به اود دس او اود اب وهكذا الى اخره ولاجل الاختصار يقال
القائم الزوايا ا د في دس او ا د \times دس او ا د دس

حاصل خطين او مسطحها في اصطلاح الهندسة هو القائم الزوايا المصطنع منها
مع ما يولدها . وقد تستعمل هذه
العبارة ايضا في علم الحساب وعلم
الجبر والمقابلة حيث يدل على
حاصل كيتين غير متثلين . واذا
كانتا متثلين فمسطحها مربع أي



كمية في ذاتها . فربعات الاعداد ٢ ٢ ١ الى آخره في ١ ٤ ١ الى اخره والمربع
المرسوم على مضاعف خط هو اربعة امثال المربع المرسوم على الخط ذاته . والمرسوم
على ثلاثة امثال خط هو تسعة امثال المرسوم على الخط ذاته

٢ شكل من الاشكال الواقعة على
جانبى التطرف في كل شكل متوازي الاضلاع
مع المتعين يسمى علم فالشكل ح غ مع المتعين
ا ق س هو علم الشكل اس وكذلك
ى ك مع ا ق وق س . ولاجل الاختصار
يسمى الاول العلم ا غ ك اى ى ح س

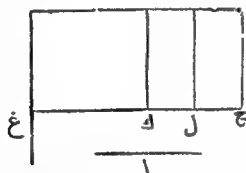


القضية الاولى . ن

اذا فُرض خطان مستقيمان وانقسم احدهما الى اقسام متعددة فالقائم
الزوايا مسطحها يعدل مجموع القوائم الزوايا مسطحات الخط غير

المقسوم في اقسام المقسوم

ليكن ب س خطاً مستقيماً وا خطاً آخر مستقيماً وليقسم ب س الى اقسام في د
وى فالقائم الزوايا \angle ب س يعدل القوائم س س ي د ب



الزوايا \angle ب د مع \angle د س مع \angle س غ
من النقطة ب ارسم الخط ب ف عموداً
على ب س (ق ١١ ك ١) واقطع منه ب غ
حتى يعدل ا (ق ٢ ك ١) ومن غ ارسم غ ح
حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١) ومن النقطة

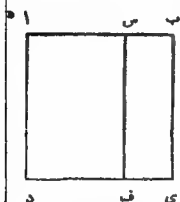
الثلاث د س ارسم المخطوط د ك ي ل س ح حتى يوازي ب غ فالاشكال
ب ح ب ك د ل ي ح هي قائمات الزوايا وب ح = ب ب ك + د ل + ي ح

لكن ب ح = ب غ \times ب س = \angle ب س لان ب غ = ا و ب ك = ب غ \times ب س
ب د = \angle ب د لان ب غ = ا و د ل = د ك \times د س = \angle د س لان د ك = ب غ
ب غ = ا (ق ٢٤ ك ١) وهكذا ايضاً ي ح = \angle ي ح س فاذا \angle ب س = \angle ب د
 \angle ب د + \angle د س + \angle س غ = \angle ب س اي القائم الزوايا او المسطح \angle ب س يعدل مجموع
القوائم الزوايا \angle ب د + \angle د س + \angle س غ

تعليقة . خصائص اقسام المخطوط المبرهنة في هذا الكتاب نستعمل ايضاً بسهولة
من علم الجبر والمقابلة . ففي هذه القضية اذا فرضنا اقسام الخط ب س ب وس ود
فلنا \angle (ب + س + د) = ا ب + ا س + ا د

القضية الثانية . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين فالقائم الزوايا مسطحها كل الخط في
كل واحد من قسميه يعدلان معاً مربع كل الخط



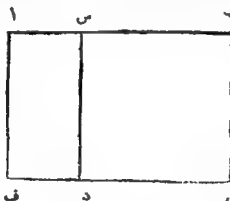
ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم
الزوايا اب \times ب س مع القائم الزوايا اب \times اس
يعدلان مربع اب اي اب \times ب س + اب \times اس = اب^٢
ارسم على اب المربع ادي ب (ق ٤٦ ك ١) ومن
س ارسم س ف حتى يوازي ا د او ب ي (ق ٢١ ك ١)

فلنا ف + س ي = ا ي ولكن اف = ا د \times اس = اب \times اس لان ا د = اب
والشكل س ي = ب ي \times ب س = اب \times ب س واي = اب^٢ فاذا اب \times
اس + اب \times ب س = اب^٢

تعليقة . وهكذا بالجبر . فلنفرض اب = ا واس = ب وبس ب = د فلنا ا =
ب + د اضرب جانبي المعادلة في ا فلنا ا^٢ = اب + ا د

الفضية الثالثة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين فالقائم الزوايا مسطح كل الخط في
احد قسميه يعدل القائم الزوايا مسطح القسمين مع مربع القسم المذكور
ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فالقائم الزوايا اب \times ب س يعدل



القائم الزوايا اس \times ب س مع مربع ب س

ارسم على ب س المربع سدي ب
(ق ٤٦ ك ١) واخرج ي د الى ف ومن ا

ارسم اف حتى يوازي س د او ب ي (ق ٢١ ك ١)

ك ١) فالشكل ا ي = ا د + س ي ولكن ي

ا ي = اب \times ب ي = اب \times ب س لان ب ي = ب س واد = اس \times س د =

اس \times س ب وبس ي = ب س^٢ فاذا اب \times ب س = اس \times س ب + ب س^٢

تعليقة . وهكذا بالجبر . فلنفرض اب = ا واس = ب وبس ب = س فلنا

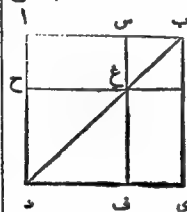
ا = ب + س اضرب الجانبيين في س فلنا اس = س ب + س^٢

القضية الرابعة . ن

إذا انقسم خط مستقيم الى قسمين فربع الخط كله يعدل مربعي القسمين
مع مضاعف القائم الزوايا مسطح القسمين

ليقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فربع اب يعدل مربع اس مع مربع
س ب مع مضاعف القائم الزوايا اس في س ب اي $اب^2 = اس^2 + س ب^2 + ٢ اس ب$

ارسم على اب المربع ادي ب (ق ٤٦ ك ١) وارسم ب د ومن س ارسم س غ
ف حتى يوازي ا د اوب ي (ق ١١ ك ١) ومن غ ارسم
ح ك حتى يوازي اب اود ي



فنحيث ان س ف يوازي ا د ويلاقيها ب د
فالزاوية الخارجة ب غ س تعدل الداخلة المتقابلة
اد ب (ق ٢٩ ك ١) ولكن اد ب = اب د (ق ١٠

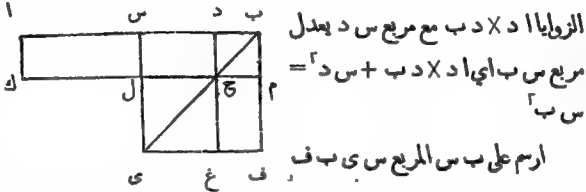
ك ١) لان اب = ا د لانها ضلعا مربع. فالزاوية س غ ب = س ب غ وب س =
س غ (ق ٦ ك ١) ولكن س ب = غ ك (ق ٢٤ ك ١) وس غ = ب ك فالشكل
ب س غ ك متساوي الاضلاع وهو متساوي الزوايا ايضا لان س ب ك قائمة
فتكون بقية زوايا الشكل س غ ك ب قائمات (فرع ق ٤٦ ك ١) فهو مربع على
الضلع س ب وهكذا ايضا يبرهن ان ح ف مربع وهو على الضلع غ ح الذي
يعدل اس فالشكلان ح ف س ك هما مربعان اس ب س ولان المثلث ا غ ب يعدل
المثلث غ ي (ق ٤٣ ك ١) واغ = اس خ س غ = اس خ س ب فلذلك ايضا غ ي
= اس خ س ب واغ + غ ي = اس خ س ب ولكن ح ف = اس خ س ب و س ك
= س ب فاذا ح ف + س ك + اغ + غ ي = اس خ س ب + اس خ س ب + اس خ س ب
ولكن ح ف + س ك + اغ + غ ي = الشكل اى او اب فاذا اب^2 = اس^2 +
س ب^2 + ٢ اس ب

فرع . ينقض من هذه القضية ان الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر
مربع هي ايضا مربعات .

تعلية. هذه القضية تبرهن ايضاً من مربع كية ثنائية في الجبر فاذا قُرض القسمان
اوب (١ + ب) $^2 = 1^2 + 2 + ب^2$

القضية الخامسة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير
متماثلين فالقائم الزوايا مسطح القسمين غير المتماثلين مع مربع القسم
الواقع بين نقطتي الانقسام يعدل مربع نصف الخط
ليُقسم الخط المستقيم اب الى قسمين متماثلين بـ س وغير متماثلين في د فالقائم



(ق ٤٦ ك ١) وارسم القطر ب ي ومن د ارم د ح غ (ق ٢١ ك ١) حتى يوازي س ي
اوب ف ومن ح ارم كل م حتى يوازي س ب او ي ف ومن ا ارم اك حتى يوازي
س ل اوب م

فمن حيث ان س ح = ح ف فاذا اضيف الى كل واحد منها د م لنا س م =
د ف ولكن ال = س م (ق ٢٦ ك ١) فاذا ال = د ف. اُضيف الى كل واحد منها
س ح فلنا اح = العلم س م غ. واح = ا د x د ح = ا د x د ب لان د ح = د ب
(فرع ق ٤ ك ٢) فالعلم س م غ = ا د x د ب. اضيف الى كل واحد منها ل غ =
س د فالعلم س م غ + ل غ = ا د x د ب + س د ولكن س م غ + ل غ = س ب س
فاذا ا د x د ب + س د = س ب س

فرع يتضح من هذه القضية ان فضلة مربعي خطين غير متماثلين اس س د
يعدل القائم الزوايا مسطح مجموعها في فضلتهما اي ان اس - س د = (اس + س د)
x (اس - س د)

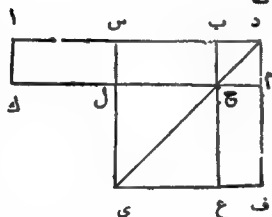
تعلية. في هذه القضية لغرض اس = اوس د = فلنا ا د = ا + ب و د ب

$a - b$ وبالجبر $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$ أي مسطح مجموع كبتين في فضلتهما يعدل فضلة مربعهما

القضية السادسة . ن

إذا تنصّف خطٌ مستقيم ثم أُخرج على استقامته إلى نقطة ما فالقائم الزوايا مسطح الخط كله بعد إخراجهِ في الجزء الذي قد زيد عليه مع مربع نصف الخط الذي قد تنصف يعدل مربع الخط المركّب من النصف والجزء المزيّد

يُنقسم الخط المستقيم ab إلى قسمين متساويين في s ثم يُخرج إلى d فالقائم الزوايا $ad \times db$ مع مربع s ب يعدل مربع s د



ارسم على s د المربع s ي ف د
(ق ٤٦ ك ١) وارسم القطر d ي ومن
ب ارسم b ح غ (ق ٢١ ك ١) حتى
يوازي d ف ا و s ي ومن ح ارسم
ك ل م حتى يوازي ا د ا و ي ف ومن

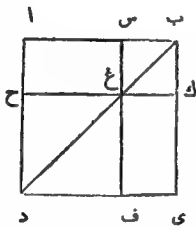
ا ارسم ا ك حتى يوازي s ل ا و د م . فمن حيث ان $as = sb$ فالقائم الزوايا
ا ل = القائم الزوايا س ح (ق ٢٦ ك ١) ولكن s ح = ح ف (ق ٤٢ ك ١) فإذا
ا ل = ح ف أضف إلى كل واحد منها s م فالكل ا م = العلم s م غ و ا م =
ا د \times د م = ا د \times د ب لأن د م = د ب فالعلم s م غ = القائم الزوايا ا د \times د ب
و s م غ + ل غ = ا د \times د ب + س ب + و س م غ + ل غ = س ف = س د
فإذا ا د \times د ب + س ب = س د

تعليقة وهكذا بالجبر. لنفرض ا ب = ١٢ و ب د = ب فلنا ا د = ١٢ + ب
و س د = ا + ب وب الضرب ب $(a + b) \times b = ١٢ + ب + ب^2$. أضف إلى
الجانبيين ا فلنا ب $\times (a + b) = ١٢ + ب + ب^2 + ب^2$ (ق ٢١ ك ١)
ا + ب = ب + ب

القضية السابعة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين فربع كل الخط مع مربع احدا القسمين
يعادل مضاعف القائم الزوايا مسطح الخط كله في ذلك القسم مع مربع
القسم الآخر

ليُقسم الخط المستقيم اب الى قسمين في س فربع اب مع مربع ب س يعادل
مضاعف القائم الزوايا اب \times ب س مع مربع اس اي $اب^2 = ب س^2 + اس^2$
ب س + اس



ارسم على اب المربع ادى ب (ق ٤٦ ك ١)
ونم الشكل كما في القضايا السابقة . فن حيث ان
 $اغ = غ ي$ فالكل $اغ + س ك = غ ي + س ك$
اي $اك = س ي$ واك + س ي = $اك + س ي$
 $+ س ي = العلم اك ف + س ك$ فاننا اك ف
 $+ س ك = اك^2 = اب^2 \times ب ك = اب^2 \times س$

ب س لان ب ك = ب س (فرع ق ٤ ك ٢) فن حيث ان اك ف + س ك = $اك^2 = اب^2$
 $\times ب س$ فالكل اك ف + س ك + ح ف = $اب^2 \times ب س + ح ف + س ك$
ح ف = اى = اب فاننا اب + س ك = $اب^2 \times ب س + ح ف + س ك$ اي حيث
ان س ك = ب س وح ف = اس اي $اب^2 + س ب^2 = اب^2 \times ب س + اس^2$
فرع فانما مجموع مربعي خطين يعادل مضاعف القائم الزوايا مسطح الخطين
مربع فضلة الخطين

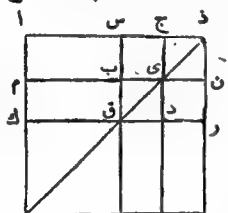
تعليقة في هذه القضية لنفرض اب = ا واس = ب وبس = ب س فلنا
 $ا^2 = ب^2 + ب س + س^2$ أضف س الى كل جانب فلنا
 $ا^2 + س^2 = ب^2 + ب س + س^2 + س^2$ اي $ا^2 + س^2 = ب^2 + ب س + س^2 + س^2$
اي $ا^2 + س^2 = س^2 + اس^2$

فرع . يتضح من هذه القضية ان المربع المرسوم على فضلة خطين يعادل مجموع
المربعين المرسومين على الخطين الا مضاعف القائم الزوايا مسطح الخطين . لان ا -
س = ب وبالترقية $ا^2 - اس^2 = ب^2$

الفضية الثامنة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين فاربعة امثال القائم الزوايا مسطح كل
الخط في احد القسمين مع مربع القسم الآخر يعدل مربع الخط المركب
من الكل مع القسم الاول

يُنقسم الخط المستقيم اج الى قسمين في س فارعة امثال القائم الزوايا اج X
ج س مع مربع اس يعدل مربع الخط المركب
من اج مع ج س



اخرج اج الى ذ واجعل ج ذ يعدل
ج س وعلى ا ذ ارم المربع ا ت ف ذ وارسم
شكلين مثل ما في الفضية السالفة . فمن حيث

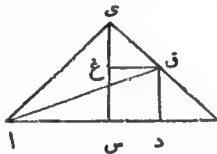
ان ب ي = س ج (ق ٢٤ ك ١) وس ج = ج ذ
وج ذ = ن ي فلذلك ب ي = ن ي ولهذا السبب ايضا ق د = د ر ولان س ج =
ج ذ وب ي = ن ي فالتامتا الزوايا س ي وج ن متساويان وكذلك ايضا ب د =
ي ر ولكن س ي = ي ر (ق ٤٢ ك ١) لانها متماثل الشكل س ر فاذا ج ن = ب د
والتامتا الزوايا الاربعة س ي ج ن ي ر ب د متساوية وهي معا = س ي
وابضا لان س ج = ج ذ وج ذ = ج ي (فرع ق ٤٢ ك ٢) اوس ب ولان س ج =
ب ي اوب ق فلذلك س ب = ب ق ولان س ب = ب ق وق د = د ر فالتامتا
الزوايا اب = م ق وق ل = د ف ولكن م ق = ق ل (ق ٤٢ ك ١) لانها متماثل
فاذا اب = د ف فالاربعة اب م ق ق ل د ف متساوية وهي معا تعدل ا ب
وقد تبهر ان س ي ب د ج ن ي ر معا = س ي فباضافة اشياء متساوية
الى اشياء متساوية يكون كل العلم ارح = ا ي و ا ي = ا ج X ج ي = ا ج X ج س
و ا ي = ا ج X ج س فالعلم ارح = ا ج X ج س . اضف الى الجانبيين ك ح
اواس (فرع ق ٤٢ ك ١) فالعلم ارح + ك ح = ا ج X ج س + اس ولكن
ارح + ك ح = ا ف = ا ذ فاذا ا ذ = ا ج X ج س + اس
فرع اول من حيث ان ا ذ هو مجموع الخطين اج ج س واس فضلها

فاربعة امثال القائمة الزوايا مسطح خطين مع مربع فضلتهما يعدل مربع مجموع الخطون
 فرع ثانٍ . بما ان قد تبين من هذه القضية ان مربع س ذ هو اربعة امثال
 مربع س ج يتضح ان مربع خط هو اربعة امثال مربع نصو
 تعلية . لنفرض ا ج = ا و اس = س و س ج = ب و ا ذ = س + ا ب و ا
 ب + س . اضرب الجانين في ا ب فلما ا ب = ا ب + ا ب + ا ب س أضف س
 الى الجانين فلما ا ب + س = س + ا ب + ا ب س + ا ب س + ا ب س = س + س
 (س + ا ب)

—•••—

القضية التاسعة . ن

اذا انقسم خطٌ مستقيم الى قسمين متماثلين وايضاً الى قسمين غير
 متماثلين فربما القسمين غير المتماثلين معاً يعدلان مضاعف مربع
 نصف الخط مع مضاعف مربع الجزء الواقع بين نقطتي الانقسام
 يُقسم الخط المستقيم ا ب الى قسمين متماثلين في س وغير متماثلين في د فربما
 ا د ب معاً يعدلان مضاعف مربعي



من س ا رسم س ي (ق ١١ ك ١)

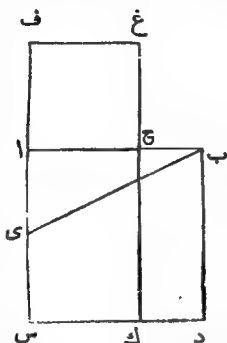
عموداً على ا ب واجعل س ي يعدل اس
 او س ب . ا رسم ا ي و ي ب ومن د ا رسم د ق (ق ١١ ك ١) حتى يوازي س ي
 ومن ق ا رسم ق غ حتى يوازي ا ب ولرسم ا ق . فمن حيث ان اس يعدل س ي
 فالزاوية ي ا س تعدل الزاوية ا ي س (ق ٥ ك ١) وهما معاً قائمة لان ا س ي
 قائمة (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) ولهما السبب ايضاً كل واحد من الزاويتين س ي ب
 س ب ي نصف قائمة . فالكل ا ي ب قائمة . ومن حيث ان غ ي ق نصف قائمة
 وي غ ق قائمة لانها تعدل اللابطة المتقابلة ي س ب ق ٢٦ ك ١ فالباقية ي ق غ
 تعدل نصف قائمة . فالزاوية غ ي ق تعدل ي ق غ والضلع ي غ يعدل الضلع
 غ ق ق ٦ ك ١ وايضاً لان الزاوية عند ب هي نصف قائمة وق د ب قائمة لانها تعدل

= ي ا س (ق ٥ ك ١) و ا س ي قائمة فكل واحدة من س ا ي س ي ا هي نصف
 قائمة (ق ٢٢ ك ١ فرع ٤) ولهذا السبب كل واحدة من س ي ب س ب ي ايضاً
 نصف قائمة فتكون ا ي ب قائمة . ومن حيث ان ي ب س نصف قائمة فالزاوية
 د ب غ ايضاً نصف قائمة (ق ١٥ ك ١) لانها متقابلتان و ب د غ قائمة لانها تعدل
 المتبادلة د س ي (ق ٢٩ ك ١) فالباقية د غ ب نصف قائمة وتعدل د ب غ فالضلع
 ب د يعدل الضلع د غ (ق ٦ ك ١) ومن حيث ان ي غ ف نصف قائمة والزاوية عند
 ف قائمة لانها تعدل المتقابلة ي س د (ق ٢٤ ك ١) فالباقية ف ي غ نصف قائمة وتعدل
 ي غ ف فالضلع ف ي يعدل الضلع غ ف (ق ٦ ك ١) ولان ي س يعدل س ا
 ي س = س ا و ي س = س ا = س ا و ا ي = س ا + س ي (ق ٤٧ ك ١)
 فاذا ا ي = س ا و ل ا ن ي ف = غ ف ي ف = ف غ و ي ف = ف غ ف غ = ف غ
 ف = ي غ (ق ٤٧ ك ١) و ي ف = س د فاذا ا ي غ = س د وقد تبين ان
 ا ي = س ا فاذا ا ي + ي غ = س ا + س د و ا غ = ا ي + ي غ
 (ق ٤٧ ك ١) فاذا ا غ = س ا + س د و ا غ = ا د + د غ (ق ٤٧ ك ١)
 = ا د + د ب فاذا ا د + د ب = س ا + س د
 تعلية. اذا فرضنا ان ا س = ا و ب د = ب و ا د = ا ب + ب و س د = ا +
 ب فلنا (ا ب + ب) + ب = ا + ا + ا ب + ب ولكن ا + ا + ا ب + ب =
 ا + ا + ب (ا ب + ب) فاذا (ا ب + ب) = ا + ا + ب (ا ب + ب)

الفضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً مفروضاً الى قسمين حتى يعدل القائم
 الزوايا مسطح الكل في احد القسمين مربع القسم الآخر

لكن اب الخط المستقيم المفروض فعلينا ان نقسمه الى قسمين حتى يعدل
 القائم الزوايا مسطح اب في احد قسميه مربع القسم الآخر. ارسم على اب المربع
 ا ب د س (ق ٤٦ ك ١) ونصف ا س في ي (ق ١٠ ك ١) ارسم ب ي واخرج س ا
 الى ف واجل ي ف حتى يعدل ي ب (ق ٢ ك ١) وعلى ا ف ارسم المربع ف غ ح ا



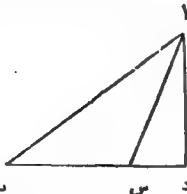
(ق ٤٦ ك ١) فقد انقسم ا ب في ح حتى يعدل
 القائم الزوايا ا ب \times ب ح مربع ا ح
 أخرج غ ح الى ك. فمن حيث ان ا س
 قد تنصف في ي ثم أخرج الى ف فالقائم الزوايا
 س ف \times ف ا مع مربع ا ي يعدل مربع ي ف
 (ق ٦ ك ٢) ولكن ي ف يعدل ي ب فالقائم
 الزوايا س ف \times ف ا مع مربع ا ي يعدل
 مربع ي ب ولكن مربع ي ب يعدل مربع
 ب ا مع مربع ا ي (ق ٤٧ ك ١) لأن ب ا ي

قائمة فالقائم الزوايا س ف \times ف ا مع مربع ا ي يعدل مربع ب ا مع مربع ا ي. اطرح
 المشترك مربع ا ي فالباقى القائم الزوايا س ف \times ف ا يعدل مربع ا ب وس ف \times ف ا
 يعدل الشكل ف ك لأن ف ا = غ و ا د يعدل مربع ا ب فالشكل ف ك يعدل
 ا د اطرح الجزء المشترك ا ك فالباقى ف ح يعدل الباقي ح د ولكن ح د = ا ب \times
 ب ح لأن ا ب = ب د و ف ح هو مربع ا ح فالقائم الزوايا ا ب \times ب ح يعدل مربع
 ا ح فقد انقسم ا ب الى قسمين في ح فالقائم الزوايا ا ب \times ب ح يعدل مربع ا ح

القضية الثانية عشرة . ن

في كل مثلث ذي زاوية منفرجة اذا رُسم عمود من احدى الحادتين
 على الضلع المقابل بعد اخراجه فمربع الضلع الذي يقابل المنفرجة
 هو اكبر من مربعي المحيطين بالمنفرجة بمضاعف القائم الزوايا مسطح
 الضلع الذي وقع عليه العمود في الجزء الزائد اي الواقع بين المنفرجة
 والعمود

ليكن ا ب س مثلثا ذا زاوية منفرجة ا س ب ولينع عمود من ا اي ا د على



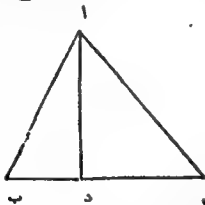
ب س بعد اخراجه الى د (ق ١٢ ك ١) فربع
اب هو اكبر من مربعي اس وس ب بمضاعف
القائم الزوايا ب س X س د

فن حيث ان ب د قد انقسم الى قسمين

في س فلنا (ق ٢ ك ٢) $ب د^2 = ب س^2 + س د^2$
٢ ب س X س د اضعف الى الجانبيين فلنا $ب د + ا د^2 = ب س^2 + س د^2 +$
 $ا د^2 + ٢ ب س X س د$ ولكن $ا ب^2 = ب د + ا د^2$ (ق ٤٧ ك ١) و $ا س^2 = س د +$
 $ا د^2$ فاذا $ا ب^2 = ب س^2 + ا س^2 + ٢ ب س X س د$ اي $ا ب^2$ هو اكبر من $ب س^2$
 $+ ا س^2$ بمسطح $٢ ب س X س د$

القضية الثالثة عشرة. ن.

في كل مثلث مربع الضلع المقابل احدى الزوايا الحادة هو اصغر من
مربعي الضلعين المحيطين بها بمضاعف القائم الزوايا مسطح احد
هذين الضلعين في الجزء منه الواقع بين الزاوية الحادة وعمود عليه
من الزاوية المقابلة



ليكن اب س مثلثا وتكن الزاوية عند ب احدى زواياه الحادة وليقع على
الضلع ب س منه عمود ا د من الزاوية المقابلة
(ق ١٢ ك ١) فربع الضلع اس الذي يقابل
الزاوية عند ب هو اصغر من مربعي س ب
ب ا بمضاعف القائم الزوايا س ب X ب د

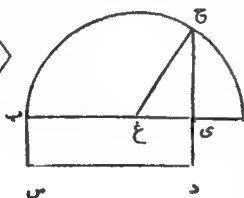
اولا يقع العمود ا د داخل المثلث اب س
فلان الخط المستقيم س ب قد انقسم في د فلنا (ق ٧ ك ٢) $ب س^2 = ب د + س د^2$
٢ ب س X ب د + س د اضعف الى الجانبيين ا د فلنا $ب س^2 + ب د + ا د^2 = ب د + س د^2 +$
 $ا د^2 + ٢ ب س X ب د$ ولكن $ا ب^2 = ب د + ا د^2$ و $ا س^2 = س د + ا د^2$
اس (ق ٤٧ ك ١) فاذا $ا ب^2 = ب س^2 + ا س^2 + ٢ ب س X ب د$ اي $ا ب^2$ هو

اصغر من ب س + ا ب بمسطح ا ب س X ب د
 ثانياً ليقع العمود ا د خارج المثلث ا ب س (انظر شكل القضية السابقة) فمن
 حيث ان الزاوية عند د هي قائمة فالزاوية ا س ب هي اكبر من قائمة (ق ١٦ ك ١)
 و ا ب = (ق ٢ ك ٢) ا س + ب س + ا ب س X س د اضعف الى المجانين ب س
 فلنا ا ب + ب س = ا س + ا ب س + ا ب س X س د ومن حيث ان الخط
 ب د قد انقسم في س فلنا (ق ٢ ك ٢) ب س + ب س X س د = ب س X ب د
 و ا ب س + ا ب س X س د = ا ب س X س د فاذ ا ب + ب س = ا س
 + ا ب س X ب د و ا س هو اصغر من ا ب + ب س بمسطح ا ب د X ب س
 ثالثاً ليكن الضلع ا س عموداً على ب س فيكون ب س
 الجزء بين العمود والزاوية الحادة عند ب والامر واضح (ق ٤٧
 ك ١) ان ا ب + ب س = ا س + ا ب س X ب د
 ا ب س X ب س



القضية الرابعة عشرة . ع

علينا ان نرسم مربعاً يعدل شكلاً مفروضاً ذا اضلاع مستقيمة
 ليكن الشكل المفروض . علينا ان نرسم مربعاً يعدل الشكل ا . ارسم شكلاً ذا



زوايا قائمة ب ي د س واجعله
 يعدل ا (ق ٤٥ ك ١) فان كان
 ضلعه ب ي د س متساويين
 فهو المربع المطلوب والا فخرج
 ب ي الى ف واجعل ي ف
 يعدل ي د وقص ب ف في

غ ومن المركز غ وعلى البعد غ ف او غ ب ارسم دائرة ب ح ف واخرج د ي الى
 ح وارسم ح غ فلان الخط المستقيم ب ف قد انقسم الى قسمين متساويين في غ وغير
 متساويين في ي فالتام الزوايا ب ي س ي ف مع مربع ي غ يعدل مربع غ ف

(ق ٥ ك ٢) و غ ف يعدل غ ح فالقائم الزوايا ب ي خ ي ف مع مربع ي غ يعدل
مربع غ ح ومربع غ ح يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا
ب ي خ ي ف مع مربع غ ي يعدل مربع ح ي مع مربع ي غ اطرح المشترك مربع
ي غ فالباقى القائم الزوايا ب ي خ ي ف يعدل مربع ح ي وب د يعدل ب ي خ
ي ف لان ي د = ي ف فالشكل ب د يعدل مربع ح ي وب د يعدل الشكل ا
فمربع ح ي يعدل الشكل ا فاذا رُم على ح ي مربع فهو يعدل الشكل ا المفروض

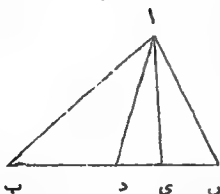
— — — — —

مضافات

قضية ا. ن.

اذا تنصّف ضلعٌ من اضلاعٍ مثلثٍ فجميع مربّعي الضلعين الآخرين
يعدل مضاعف مربع نصف الضلع المنتصف مع مضاعف مربع الخط
المرسوم من نقطة المنتصف الى الزاوية المقابلة

ليكن ا ب س مثلثاً وليتصف الضلع ب س منه في د وارسم دا الى الزاوية
المقابلة فجميع مربّعي ب ا ا س يعدل مضاعف
مربّعي ب د دا



من ا ارم اى عموداً على ب س فن حيث

ان ب ي افائمه ا ب (ق ٤٧ ك ١) = ب ي +

ي ا واس = س ي + ي ا وب + اس = س ي د ب

ب ي + س ي + ا ب ومن حيث ان الخط المستقيم ب س قد انقسم الى قسمين

متساويين في د وغير متساويين في ي فلنا (ق ٩ ك ٢) ب ي + س ي = ب د +

+ د ي فاذا ا ب + اس = ب د + د ي + ا ب + اس = ب د + د ي + ا ب +

د ي (ق ٤٧ ك ١) واد ي + ا ب = ا ب + د ي فاذا ا ب + اس = ب د + د ي + ا ب +

اصول الهندسة

— ١٠٠١ —

الكتاب الثالث

حدود

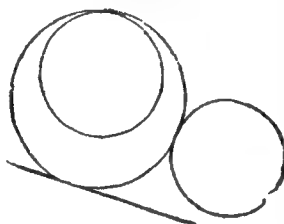
١. نصف قطر دائرة هو خطٌ مستقيمٌ مرسوم من المركز الى المحيط

١. مماسٌ دائرة هو خطٌ مستقيم

يلتقي المحيط في نقطة واحدة واذا أُخرج

فلا يقطعها. وتلك النقطة تسمى نقطة

المماس



٢. اذا التقى محيطا دائرتين

بدون ان يتقاطعا يقال ان الدائرة

الواحدة تمس الاخرى

٣. خطوط مستقيمة على بعد واحد من مركز

دائرة هي التي كانت العموديات منها الى المركز

متساوية



٤. والخط المستقيم الذبي يقع عليه العمود

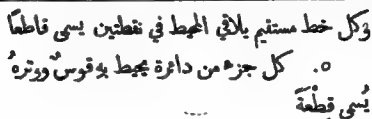
الاطول هو الابدع عن المركز

ب. القوس هو جزء من محيط دائرة. والخط

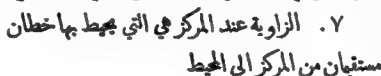
المستقيم الموصل بين طرفي قوس يسمى وترًا



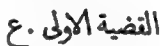
ج. متى كان طرفا خطٍ مستقيم في محيط دائرة قيل انه مرسوم في الدائرة



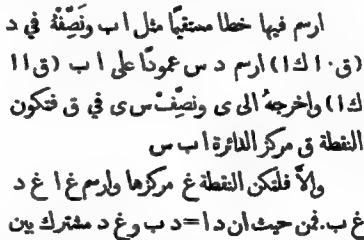
الى طرفي الوزر. ومثلث في دائرة هو ما كانت زواياه الثلاث في المحيط. وعلى الاطلاق كل شكل في دائرة هو ما كانت زواياه في المحيط. ويقال ان الدائرة تحيط به



٦. القطع المتشابهة هي ما كانت الزوايا المحاذية فيها متساوية



لتكن ab س الدائرة المفروضة. علينا ان نجد مركزها



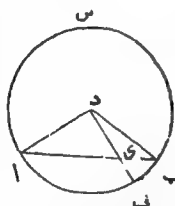
المثلثين غ دا غ دب فالضلعان اد دغ بدلان الضلعين ب د دغ اي كل

واحد يعدل نظيره والقاعدة غ ا تعدل القاعدة غ ب لان كل واحدة منها نصف قطر من دائرة واحدة فالزاوية ا د غ = غ د ب (ق ٨ ك ١) فتكون كل واحدة منها قائمة (حد ٧ ك ١) فاذا غ د ب قائمة ولكن ق د ب قائمة فاذا غ د ب = ق د ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذلك محال فلا تكون النقطة غ مركز الدائرة وهكذا يبرهن في كل نقطة ما عدا النقطة ق فهي اذا مركز الدائرة ا ب س
 فرع. يتضح من هذه القضية انه اذا كان خط عمودياً على آخر في دائرة ونصّنه فالمرکز في الخط المنصف

القضية الثانية . ن

اذا فُرِضَت نقطتان في محيط دائرة فالخط المستقيم الموصل بينهما واقع داخل الدائرة

لكن ا ب س دائرة وتُفَرَّض في محيطها نقطتان مثل ا و ب وليوصل بينهما بالخط المستقيم ا ب فهو داخل الدائرة



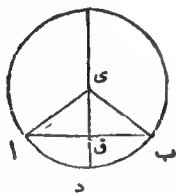
في الخط ا ب افرض ا ب نقطة كانت مثل ي واستعلم د مركز الدائرة ا ب س (ق ١ ك ٢) وارسم الخطوط المستقيمة ا د د ب د ي واخرج د ي حتى يلاقي المحيط في ف فمن حيث ان د ا = د ب فالزاوية د ا ب = الزاوية د ب ا (ق ٥ ك ١) ومن حيث

ان ا ي ضلع من المثلث د ي ا وقد أُخْرِج الى ب فالزاوية الخارجة د ي ب هي اكبر من د ا ي (ق ٦ ك ١) فهي اكبر من د ب ا ايضاً و د ب ي والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩ ك ١) فاذا د ب هو اطول من د ي ولكن د ب = د ف فاذا د ف هو اطول من د ي اي النقطة ي هي داخل الدائرة وهكذا يبرهن في كل نقطة في الخط ا ب فهو اذا داخل الدائرة
 فرع. كل نقطة في ما يزداد على ا ب خارج الدائرة

القضية الثالثة . ن

كل خط مستقيم ماراً بمركز دائرة اذا نصّف خطاً آخر مستقيماً داخل الدائرة غير ماراً بالمركز فانه يُحدث معه قائمتين . واذا احدث معه قائمتين ينصفه

لكن اب س دائرة وس د خطاً مستقيماً ماراً بمركزها وينصف الخط المستقيم اب الذي لا يمر بالمركز في النقطة ق فانه يُحدث معه قائمتين



استعلم مركز الدائرة ي (ق ا ك ٢) وارسم اى ب ي فمن حيث ا ق = ق ب وى ق مشترك بين المثلثين ا ق ي ب ق ي فضلعان من الواحد بعدلان ضلعين من الآخر والقاعدة اى تعدل القاعدة ي ب

والزاوية ا ق ي تعدل الزاوية ب ق ي (ق ا ك ١) فكل واحدة منها قائمة (حد ٧ ك ١) فالخط المستقيم د س الذي يمر بمركز الدائرة والذي ينصف الغير المار بالمركز اب يحدث معه قائمتين

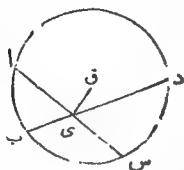
ثم لنفرض ان الخط المستقيم س د يحدث مع اب قائمتين فهو ينصفه ايضا اى ا ق يعدل ق ب . ثم الشكل حسبا تقدم فمن حيث ان اى يعدل ي ب فالزاوية اى ق يعدل ي ب ق (ق ٥ ك ١) والقائمة ا ق ي تعدل القائمة ب ق ي والضلع اى ق مشترك بين المثلثين ا ق ي ب ق ي وهو يقابل الزاويتين المتساويتين (ق ٢٦ ك ١) فالمثلثان متساويان والضلع الباقي من الواحد يعدل الباقي من الآخر اى ا ق = ق ب

فرع أول . العمود على نصف الوتر يمر بالمركز
فرع ثان . العمود على نصف الوتر اذا أُخرج حتى يلاقي المحيط من طرفيه فهو قطر . ونقطة اتصافه هي مركز الدائرة

القضية الرابعة . ن

اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة ولا يمران بالمركز فلا يتنصفان معاً

لكن ا ب س د دائرة واس ب د خطين مستقيمين فيها يتقاطعان في النقطة
ي ولكن لا يمران بالمركز فلا ينصف بعضهما بعضاً والآخر



فاذا كان يمكن ليكن ا ي س متساويين وب ي
ي د كذلك . فان مرآحدها بالمركز فالامر واضح انه

لا ينصف بالآخر الذي لا يمر بالمركز . وان لم يمر
احدها بالمركز فاستعلم المركز ق (ق ا ك ٣) وارسم ق .

ي فمن حيث ان الخط المار بالمركز ق ي ينصف آخر الذي لا يمر بالمركز ا س فيحدث
معه قائمتين (ق ٢ ك ٢) فتكون ق ي ا قائمة . ومن حيث ان ق ي ينصف ب د

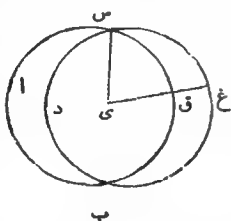
الذي لا يمر بالمركز فيحدث معه قائمتين (ق ٢ ك ٢) فتكون ق ي ب قائمة وق ي ا
تعدل ق ي ب اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فاذا ا س ب د لا ينصف

بعضها بعضاً

القضية الخامسة . ن

اذا تقاطعت دائرتان لا يكون لهما مركز واحد

لكن ا ب س س د غ دائرتين ولتقاطعا في س وب فليس لهما مركز واحد
والا فليكن النقطة ي مركزها . ارسم س ي



وارسم خطاً آخر مثل ي ق غ يلاقي المحيطين
في ق و غ

فمن حيث ان ي مركز الدائرة ا ب س
فنصف القطري س يعدل نصف القطري ق

وايضاً من حيث ان ي مركز الدائرة س د غ
فنصف القطري س يعدل نصف القطري غ . وقد تبين ان س ي يعدل ي ق

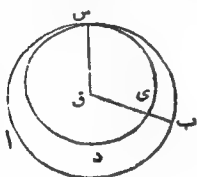
فإنّا ي ق يعدل ي غ اي الجزء يعدل الكلّ وذلك محال فلا يمكن ان تكون
النقطة ي مركز الدائرتين

—•••—

القضية السادسة . ن

إذا مسّت دائرة دائرة أخرى من داخلها فلا يكون لها مركز واحد

لتكن ا ب س د ي س دائرتين ولتمس احدهما الاخرى في س فلا يكون لها
مركز واحد



والأ فلتكن النقطة ق مركزها . ا رسم ق س
وارسم خطاً آخر مثل ق ي ب يلتقي المحيطين في
ي وب . فمن حيث ان ق مركز الدائرة ا ب س
فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ب

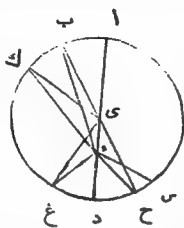
وايضاً لان ق مركز الدائرة د ي س فنصف القطر ق س يعدل نصف القطر ق ي
وقد تبين ان ق س يعدل ق ب فأنّا ق ي يعدل ق ب اي الجزء يعدل الكل
وذلك محال فلا تكون النقطة ق مركز الدائرتين

—•••—

القضية السابعة . ن

إذا فُرِضَتْ نقطة في قطر دائرة غير المركز فاطول الخطوط المستقيمة
التي يمكن رسمها من تلك النقطة الى المحيط هو الذي يقع فيه المركز اي
قسم من القطر . واقصرها هو القسم الآخر من القطر واما بقية الخطوط
التي تُرسم من تلك النقطة الى المحيط فالاقرب الى القسم من القطر
المارّ بالمركز هو الاطول ولا يُرسم من تلك النقطة الى المحيط أكثر من
خطّين متساويين اي واحد على الجانب الواحد من القطر والآخر
على الجانب الآخر منه .

ليكن ا ب س ك دائرة واد قطرها ولنفرض فيه نقطة ف غير المركز وليكن ي



المركز فيبين كل المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى المحيط فالخط ف ا هو الاطول وف د هو الاقصر ومن البقية فالخط ف ب اطول من ف س وف س اطول من ف غ وهلم جرا . ا رسم ب ي س ي غ ي فن حيث ان ضلعين من اضلاع مثلث هما معا اطول من الثالث (ق ٢٠ ك ١) فالضلعان ب ي ي ف هما اطول

من ب ف و ا ي يعدل ب ي فاذا ا ي ي ف يعني ا ف اطول من ب ف وايضا من حيث ان ب ي يعدل س ي و ي ف مشترك بين المثلثين ب ي ف س ي ف فالضلعان ب ي ي ف يعدلان س ي ي ف ولكن الزاوية ب ي ف هي اكبر من س ي ف فالقاعدة ب ف هي اطول من القاعدة س ف (ق ٢٤ ك ١) ولهذا السبب س ف اطول من غ ف . وايضا من حيث ان غ ف ف ي هما معا اطول من غ ي (ق ٢٠ ك ١) و ي غ يعدل ي د فاذا غ ف ف ي هما معا اطول من د ي ا طرح الجزء المشترك ف ي فالبقية غ ف اطول من البقية د ف فاذا ف ا هو اطول المخطوط التي يمكن رسمها من ف الى المحيط وف د اقصرها وف ب اطول من ف س وف س اطول من ف غ وهلم جرا

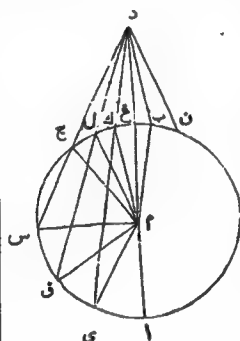
كذلك لا يمكن ان يرسم من ف الى المحيط على جانبي ف د اكثر من خطين متساويين . عند ي اجعل الزاوية ف ي ح حتى تعدل غ ي ف وارسم ف ح . فن حيث ان غ ي يعدل ي ح و ي ف مشترك بين المثلثين غ ي ف ح ي ف فالضلعان غ ي ي ف معا يعدلان ح ي ي ف والزاوية غ ي ف تعدل ح ي ف فالقاعدة ف غ تعدل القاعدة ف ح (ق ٤ ك ١) ولا يمكن ان يرسم خط آخر غير ف ح يعدل ف غ من ف الى المحيط والا فليكن ذلك الخط الآخر ف ك فن حيث ان ف ك يعدل ف غ وف غ يعدل ف ح فاذا ف ك يعدل ف ح اي الخط الاقرب الى الذي يمر بالمركز يعدل الاعد وذلك لا يمكن كما تقدم برهانه

القضية الثامنة . ن

اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها خطوط مستقيمة الى المحيط

وَمَرَّ أَحَدُهُمَا بِالْمَرْكَزِ فَاطْوَلُ الْخُطُوطِ الْوَاقِعَةِ عَلَى مَقْعَرِ الدَّائِرَةِ هُوَ الْمَارُّ
بِالْمَرْكَزِ وَمِنَ الْبَقِيَّةِ فَالْأَقْرَبُ إِلَى الْمَارِّ بِالْمَرْكَزِ هُوَ اطْوَلُ مِنَ الْأَبْعَدِ عَنْهُ
وَمِنَ الْخُطُوطِ الْوَاقِعَةِ عَلَى مَحْدَبِ الدَّائِرَةِ فَالْأَقْصَرُ هُوَ الْمَرْسُومُ مِنَ
النَّقْطَةِ الْمَفْرُوضَةِ إِلَى الْقَطْرِ وَإِنَّمَا الْبَقِيَّةُ فَالْأَقْرَبُ إِلَى الْأَقْصَرِ هُوَ
أَقْصَرُ مِنَ الْأَبْعَدِ عَنْهُ. وَلَا يُرْسَمُ أَكْثَرُ مِنْ خَطَّيْنِ مُتَسَاوِيَيْنِ مِنَ النَّقْطَةِ
الْمَفْرُوضَةِ إِلَى الْحَيْطِ وَذَلِكَ عَلَى جَانِبِي الْخَطِّ الْأَقْصَرِ

لَتَكُنْ اس ن دَائِرَةً وَد نَقْطَةً مَفْرُوضَةً خَارِجَهَا وَلْتَرَمِ الْخُطُوطُ الْمُسْتَقِيمَةُ د ا



د ي د ق د س إِلَى الْحَيْطِ وَلْيَمَرَّ الْخَطُّ د ا
بِالْمَرْكَزِ. فَمِنَ الْخُطُوطِ الْوَاقِعَةِ عَلَى مَقْعَرِ الْحَيْطِ
أَعْيُنِي ق س فَالْأَطْوَلُ هُوَ ا د وَالْأَقْرَبُ إِلَى
ا د يَعْنِي ي د هُوَ اطْوَلُ مِنْ ق د وَق د اطْوَلُ
مِنْ س د. وَمِنَ الْخُطُوطِ الْوَاقِعَةِ عَلَى مَحْدَبِ
الْحَيْطِ ح ل ك غ فَالْأَقْصَرُ هُوَ د غ بَيْنَ النَّقْطَةِ
الْمَفْرُوضَةِ د وَالْقَطْرِ ا غ وَالْأَقْرَبُ إِلَى هَذَا يَعْنِي
د ك هُوَ أَقْصَرُ مِنْ د ل وَد ل أَقْصَرُ مِنْ د ح
وَهَلُمَّ جَرًّا

اسْتَعْلِمَ مَرْكَزَ الدَّائِرَةِ (ق ا ك ٢) وَارْسَمِ ي م ق م س ح م ل م ك. فَمِنْ
حَيْثُ ا ن م ا يَعْدِلُ م ي فَإِذَا أُضِيفَ م د إِلَى كُلِّ وَاحِدٍ مِنْهَا لَنَا د ا يَعْدِلُ د م مَعَ
م ي وَد م م ي هَا مَعًا اطْوَلُ مِنْ د ي (ق ٢٠ ك ١) فَإِذَا د ا هُوَ أَيْضًا اطْوَلُ مِنْ
د ي. وَمِنْ حَيْثُ ا ن م ي يَعْدِلُ م ق م وَد مَشْتَرِكٌ بَيْنَ الْمَثَلِثَيْنِ د م ي د م ق
فَالضَّلْعَانِ د م م ي يَعْدِلَانِ الضَّلْعَيْنِ د م ق وَلَكِنْ الزَّوْيَةُ د م ي أَتَمَّا هِيَ أَكْبَرُ مِنَ
الزَّوْيَةِ د م ق فَالْقَاعِدَةُ د ي اطْوَلُ مِنَ الْقَاعِدَةِ د ق (ق ٢٤ ك ١) وَهَكَذَا أَيْضًا
يَبْرَهُنَّ ا ن د ق اطْوَلُ مِنْ د س. فَإِذَا د ا هُوَ اطْوَلُ هَذِهِ الْخُطُوطِ وَد ي هُوَ اطْوَلُ
مِنْ د ق وَد ق اطْوَلُ مِنْ د س. ثُمَّ مِنْ حَيْثُ ا ن م ك ك د هَا مَعًا اطْوَلُ مِنْ م د
(ق ٢٠ ك ١) وَمَغ ي يَعْدِلُ م ك فَالْبَقِيَّةُ ك د هِيَ اطْوَلُ مِنَ الْبَقِيَّةِ غ د (أَوَّلِيَّةٌ ٥)

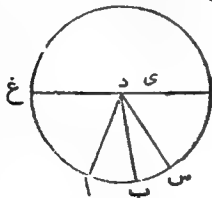
اعني دغ هو اقصر من دك ومن حيث ان م ك د ك قدرُما الى النقطة ك داخل
 المثلث م ل د وذلك من م ود طرفي قاعدتيه د د فالحيطان م ك ك د معا هما اقصر
 من م ل ل د معا (ق ٢١ ك ١) وم ك يعدل م ل فالبقية ك د هي اقصر من البقية
 ل د وهكذا يبرهن ان دل هو اقصر من دح فاذنا دغ هو اقصر هذه المخطوط
 ود ك اقصر من دل ودل اقصر من دح ولم جراً
 كذلك لا يرسم الاخطان متساويان من د الى المحيط وذلك على جانبي الاقصر
 فعند النقطة م من المخط م د اجعل الزاوية د م ب تعدل د م ك وارسم د ب فلنا
 في المثلثين ك د م ب د م الضلعان المتساويان ب م م ك والضلع المشترك د م
 والزاوية ب م د تعدل الزاوية ك م د فالضلع الاخر د ك يعدل الاخر د ب
 (ق ٤ ك ١) ولا يرسم خط آخر غير د ب حتى يعدل د ك اعني من د الى المحيط
 وان كان ممكناً فليكن دن ذلك المخط فن حيث ان دن يعدل د ك ود ك
 يعدل د ب فاذنا دن يعدل د ب يعني الاقرب الى دغ يعدل الابدعه وقد
 تبرهن ان ذاك غير ممكن



القضية التاسعة . ن

اذا فرضت داخل دائرة نقطة يرسم منها الى المحيط اكثر من خطين
 مستقيمين متساويين فتلك النقطة هي مركز الدائرة

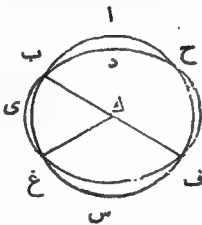
لنفرض النقطة د في الدائرة ا ب س التي منها يقع على المحيط اكثر من خطين
 مستقيمين متساويين د ا د ب د س فالتقط د
 هي مركز الدائرة . والآن لنتكن النقطة هـ المركز . ارسم
 د هـ واخرجه الى المحيط في ف و هـ فيكون المخط ف
 ف هـ قطراً ومن حيث انه قد تعين في القطر
 نقطة اعني د التي ليست هي مركز الدائرة فالحظ
 د ف هو اطول المخطوط التي يمكن رسمها من تلك
 النقطة الى المحيط (ق ٧ ك ٢) ود س هو اطول من د ب ود ب اطول من د ا



وقد فرضت مساوئها فلذلك محال فإذا لا يمكن ان تكون ي المركز ومكلا يبرهن في كل نقطة غير د . فهي المركز

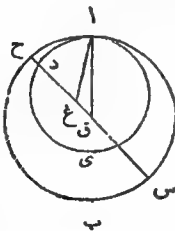
الفضية العاشرة . ن

لا يمكن ان تقطع دائرة دائرة أخرى في أكثر من نقطتين
ان كان ممكناً ليقطع المحيط ف ا ب المحيط د ي ف في أكثر من نقطتين اعني
في ب و غ و ف . استعلم ك مركز الدائرة ا ب س وارسم
ك ب ك غ ك ف . فمن حيث انه قد نعتت النقطة ك
داخل الدائرة د ي ف ووقع منها على المحيط أكثر
من خطين مستقيمين متساويين اعني ك ب ك غ
ك ف فهي اعني ك مركز الدائرة د ي ف (ق ٩ ك ٢) ف
وهي أيضاً مركز ا ب س اي دائرة تقطع دائرة أخرى
ولها مركز واحد وذلك لا يمكن (ق ٥ ك ٢) فلا يمكن ان تقطع دائرة دائرة أخرى في
أكثر من نقطتين



الفضية الحادية عشرة . ن

إذا مسّت دائرة دائرة أخرى من داخلها فالخط المستقيم الموصل بين
مركزيهما إذا أُخرج يمرّ بالنقطة المماسّة
لكن ا ب س ا د ي دائرتين وتمسّ احدهما الاخرى في النقطة ا وليكن ق
مركز الدائرة ا ب س و غ مركز الدائرة ا د ي فالخط
الموصل بين ق و غ إذا أُخرج يمرّ بالنقطة المماسّة
والأ فلينع على نقطة أخرى ان كان ممكناً مثل
الخط ق غ د ح . ثم ارسم ا غ ا ق . فمن حيث ان
الضلعين ا غ ق ا غ ق هما معاً أطول من ا ق (ق ٢٠ ك ١)
او ق ح لأن ق ح ق ا نصف قطر لدائرة واحدة فإذا



طُرِحَ الجزء المشترك ق غ فالباقي غ ا يعدل الباقي غ ح ولكن اغ يعدل غ د فاذا
غ د يعدل غ ح اعني الجزء يعدل الكل وذاك محال. فالخط الموصل بين المراكز
لا يمكن وقوعه مثل الخط ق غ د ح وهكذا يبرهن في كل خط ما عدا الذي يقع على
النقطة ا

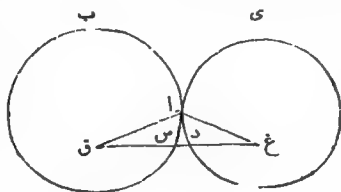
فرع اول. اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من داخلها فالبعد بين مركزيها
يعدل فضلة نصفي قطريها لان المحيطين يمران بنقطة واحدة في الخط الموصل بين
المراكز

فرع ثان. بالقلب اذا عدل البعد بين المراكز فضلة نصفي القطرين فالدائرة
الواحدة تمس الاخرى من داخلها

القضية الثانية عشرة . ن

اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من خارجها فالخط المستقيم الموصل
بين مركزيها يمر بنقطة الماسة

لكن اب س ا د ي دائرتين وتمس احدهما الاخرى في ا وليكن ق مركز
الدائرة اب س وليكن غ مركز
الدائرة ا د ي فالخط المستقيم
الموصل بين ق و غ يمر بنقطة
الماسة



والأ فليقع على غير نقطة

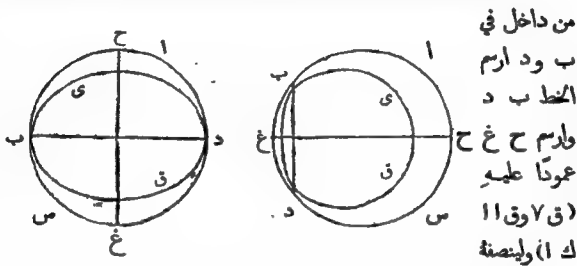
الماسة مثل الخط ق س د غ ا رسم ق ا غ ا. فمن حيث ان ق مركز الدائرة اب س
فالخط ق س يعدل ق ا و غ مركز ا د ي فالخط غ د يعدل غ ا فاذا غ ا اق معاً
يعدل ان ق س غ د معاً فالكل ق غ ا طول من ق ا غ معاً وذلك لا يمكن (ق ٢٠)
ل (ا) وهكذا يبرهن في كل خط غير الذي يمر بنقطة الماسة

فرع اذا مسّت دائرة دائرة اخرى من خارجها فالبعد بين مركزيها يعدل
مجموع نصفي قطريها وبالقلب اذا عدل بعد مركزيها مجموع قطريها فالواحدة تمس
الاخرى من خارجها

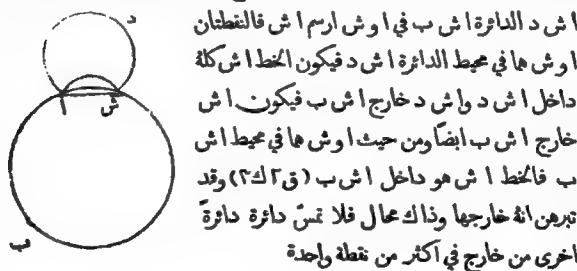
القضية الثالثة عشر.

دائرة لا تمس أخرى في أكثر من نقطة واحدة ان كان من داخل او من خارج

ان كان يمكن لمس الدائرة ب ق الدائرة ا ب س في أكثر من نقطة واحدة ولولا



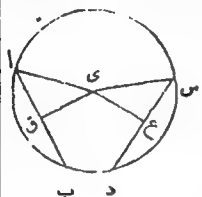
ايضاً . فمن حيث ان ب و د هما في محيط كل واحدة من الدائرتين فالخط المستقيم ب د واقع داخل كل واحدة منها (ق ٢ ك ٣) ومركزها في الخط العمودي عليه المصنعة (فرع ق ١ ك ٣) فإذا غ ح يمر بنقطة الماسة (ق ١١ ك ٣) وهو لا يمر بها لأن ب و د خارجتان عن الخط المستقيم غ ح فلا يمكن ان تمس الدائرة الاخرى في أكثر من نقطة واحدة من داخل ولا يمكن ذلك من خارج . فان كان يمكن فلتمس الدائرة



الفضية الرابعة عشرة . ن

خطوط مستقيمة متساوية في دائرة هي على بعد واحد من المركز .
وخطوط مستقيمة على بعد واحد من المركز هي متساوية

ليكن ا ب وس د خطين مستقيمين متساويين في الدائرة ا ب د س فيها على
بعد واحد من المركز . استعلم المركز ي (ق ا ك ٢)



وارسم ي ق ي غ عمودين على ا ب وس د وارسم
ايضا ا ي وس ي . فن حيث ان الخط المستقيم المار
بالمركز اعني ي ق يجعل مع ا ب الذي لا يمر بالمركز
زاوية قائمة فهو ينصفه ايضا (ق ٢ ك ٢) فاذا ا ق

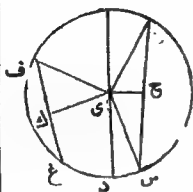
يعدل ق ب اعني ا ب هو مضاعف ا ق . وهكذا ايضا يبرهن ان س د مضاعف
س غ . و ا ب يعدل س د فاذا ا ق يعدل س غ ومن حيث ان ا ي يعدل ي س
فمربع ا ي يعدل مربع ي س ومجمع مربعي ا ق ي ق يعدل مربع ا ي (ق ٤٧ ك ١)
لان ا ق ي قائمة وهكذا ايضا مجموع مربعي س غ ي غ يعدل مربع س ي . فربما ا ق
ق ي يعدلان مربعي س غ ي غ ومربع س غ ي غ يعدل مربع ا ق لان س غ يعدل
ا ق فاذا مربع الباقي ي غ ي يعدل مربع الباقي ي ق اعني ي غ ي يعدل ي ق فاذا
ا ب وس د هما على بعد واحد من المركز (حد ٢ ك ٢)

ثم اذا فرض انهما على بعد واحد من المركز اعني ان ق ي يعدل ي غ ي فيها
متساويان لانه يبرهن على ذات الاسلوب السابق ان ا ب مضاعف ا ق وس د
مضاعف س غ وان مجموع مربعي ا ق ي ق يعدل مجموع مربعي س غ ي غ ومربع
ق ي يعدل مربع ي غ ي فمربع الباقي ا ق يعدل مربع الباقي س غ و ا ق يعدل س غ
و ا ب مضاعف ا ق وس د مضاعف س غ فاذا ا ب يعدل س د

الفضية الخامسة عشرة . ن

القطر هو اطول الخطوط التي ترسم في دائرة اما البقية فالاقرب الى
المركز اطول من الابدع عنه والاطول هو اقرب الى المركز من الاقصر

لكن ا ب س د دائرة واد قطرهما وى مركزها وليكن م ب س خطا فيها
 وليكن اقرب الى المركز من الخط ف غ فاقطر ا د
 اطول من اى خط آخر رُم في الدائرة وب س
 اطول من ف غ
 ارسم ح عمودا على ب س وى ك عمودا على
 ف غ وارسم ي ف ي ب س . فمن حيث ان اى
 يعدل ب ي وى د يعدل ي س فالكمل ا د يعدل
 ب ي مع ي س وب ي مع ي س اطول من ب س (ق ٢٠ ك ١) فاذا ا د اطول
 من ب س

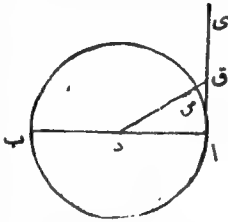


ومن حيث ان ب س اقرب الى المركز من ف غ فالعمودى ح اقصر من
 العمودى ك (حد ٢ ك ٢) وب س هو مضاعف ب ح (ق ١٤ ك ٢) وف غ مضاعف
 ف ك ومجمع مربعى ب ح ح ي يعدل بمجمع مربعى ف ك كى ومربع ح ي اصغر
 من مربع ي ك فيكون مربع ح ب اكبر من مربع ك ف فاذا ب ح اطول من ك ف
 وب س ايضا اطول من ف غ
 ثم لنفرض ان ب س اطول من ف غ فهو ايضا اقرب الى المركز منه فمن حيث
 ان ب س اطول من ف غ فاذا ب ح اطول من ف ك ومجمع مربعى ف ك كى
 يعدل بمجمع مربعى ب ح ح ي ومربع ب ح اكبر من ف ك فيكون مربعى ح
 اصغر من مربع ي ك اعني ح اقصر من ي ك فاذا (حد ٢ ك ٢) ب س اقرب
 الى المركز من ف غ
 فروع . الوتر الاقصر هو الابدع عن المركز والقلب الوتر الابدع عن المركز هو
 الاقصر

الفضية السادسة عشرة . ن

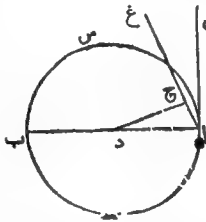
الخط المستقيم العمودي على طرف قطر دائرة هو واقع خارج الدائرة
 ولا يرسم خط مستقيم من طرف القطرين ذاك العمود ومحيط الدائرة
 بدون ان يقطع المحيط .

لكن اب س دائرة ود مركزها واب قطرها وليُرسَم اى عموداً على اب من
النقطة ا فهو واقع خارج الدائرة



عين في اى اية نقطة شئت مثل ق وارسم
ق د الذي يقطع المحيط في س . فمن حيث ان
دا ق قائمة فهي اكبر من اق د (ق ٢٢ ك ١)
والزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاطول (ق ١٩
ك ١) فاذا د ق اطول من دا ود ا يعدل د س

فاذا د ق اطول من د س فالنقطة واقعة خارج الدائرة وفي اية نقطة كانت من
المخطاى فهو اذاً خارج الدائرة



كذلك لا يُرسَم بين اى والمحيط خطٌ مستقيم
من النقطة ا الذي لا يقطع المحيط . ارسم غ ا في
الزاوية داى . وارسم د ح عموداً على ا غ فمن حيث
ان د ح قائمة ود ا ح اصغر من قائمة فالضلع
د ح اقصر من الضلع د ا (ق ١٩ ك ١) فالنقطة
ح في داخل الدائرة فالمخطا غ قاطع الدائرة

فرع اول . المخط العمودي على طرف القطر دائرة هو ممسٌ الدائرة ويمسها في
نقطة واحدة فقط لانه لو لا قاما في نقطتين لوقع داخل الدائرة (ق ٢٢ ك ٣) ولا يكون
اكثر من ماسٍ واحد في نقطة واحدة من الدائرة

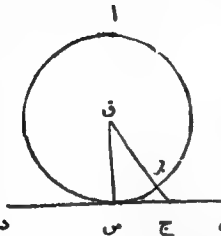
فرع ثانٍ . العمود على طرف القطر هو ماسٌ للدائرة وبالقلب الماس هو عمودي
على طرف القطر

فرع ثالث . ماسان من طرفي قطرها متوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١) وبالقلب
ماسان متوازيان هما عموديان على طرفي القطر

—•••—

الفضية السابعة عشرة . ع

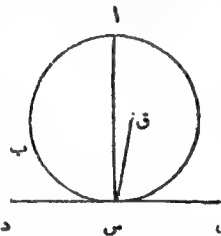
علينا ان نرسم خطاً مستقيماً من نقطة مفروضة في محيط دائرة او خارج
المحيط حتى يماس دائرة مفروضة



ق س فالخط المستقيم ق س انما هو عمود على
 دى والآن ق ارم ق ب ج عموداً على دى
 فتكون ق ج س قائمة فتكون ج س ق حادة
 (ق ١٧ ك ١) والضلع الاطول يقابل الزاوية
 الكبرى (ق ١٦ ك ١) فالضلع ق س اطول من
 الضلع ق ج ولكن ق س يعدل ق ب فانما
 ق ب اطول من ق ج اعني الجزء اعظم من كله وذلك محال فلا يمكن ان يكون
 ق ج عموداً على دى ومكلاً يبرهن في كل خط ما عدا ق س فهو عمود على دى

القضية التاسعة عشرة . ن

اذا مس خط مستقيم دائرة ورسم من نقطة الماسة خط مستقيم عموداً
 على الماس فمركز الدائرة واقع في ذلك الخط العمودي
 ليكن الخط المستقيم دى ماساً للدائرة ا ب س ومن نقطة الماسة س يرسم س ا

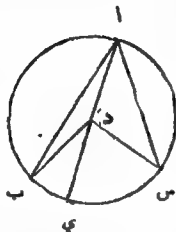


عموداً على دى فمركز الدائرة واقع في الخط س ا
 والا فليكن ق المركز ارم ق س نحسب
 القضية السابقة ق س هو عمود على دى وق س ي
 قائمة ولكن ا س ي ايضاً قائمة فانما ا س ي
 تعدل ق س ي اعني الكل يعدل جزؤه وذلك
 محال فلا يمكن ان تكون ق المركز ومكلاً يبرهن
 في كل نقطة لا تقع في الخط س ا فالمركز واقع في الخط س ا

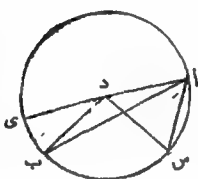
القضية العشرون . ن

الزاوية عند مركز دائرة هي مضاعف الزاوية عند المحيط اذا كانتا على
 قاعدة واحدة اعني على جزء واحد من المحيط

لتكن ا ب س دائرة وب د س الزاوية عند المركز وب ا س الزاوية عند المحيط وكلتاها على جزء واحد من المحيط ب س فالزاوية ب د س انما هي مضاعف ب ا س



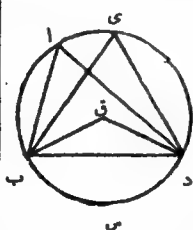
اولاً ليكن د مركز الدائرة داخل الزاوية ب ا س ارسماً واخرجه الى ي . فمن حيث ان د ا يعدل د ب فالزاوية د ا ب تعدل الزاوية د ب ا (ق ٥ ك ١) فالزاويتان د ب ا د ا ب هما معاً مضاعف د ا ب والزاوية ب د ي تعدل د ا ب د ب ا معاً (ق ٢٢ ك ١) فاناً ب د ي في مضاعف د ا ب وهكذا يبرهن ان ي د س مضاعف د ا س فالكمل ب د س مضاعف الكل ب ا س



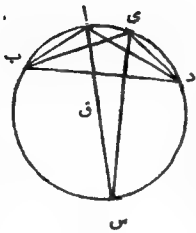
ثم ليكن المركز د خارج الزاوية ب ا س . ارسماً واخرجه الى ي . فيبرهن كما تقدم ان الزاوية ي د س هي مضاعف د ا س وان ي د ب جزءاً من الاولى مضاعف د ا ب جزء من الثانية فالباقية ب د س مضاعف الباقية ب ا س

القضية الحادية والعشرون . ن

الزوايا في قطعة واحدة من دائرة هي متساوية



لتكن ا ب س د دائرة وب ا د ب ي د زاويتين في قطعة واحدة منها ب ا ي د فيها متساويتان استعمل ق مركز الدائرة واولاً لتكن النقطتان ب ا ي د اكبر من نصف دائرة . ارسماً ب ق د ق فالزاوية ب ق د عند المركز هي مضاعف الزاوية ب ا د عند المحيط لانها على قاعدة واحدة ب س د (ق ٢٠ ك ٢) وب ق د ايضاً مضاعف ب ي د فاناً ب ا د تعدل ب ي د

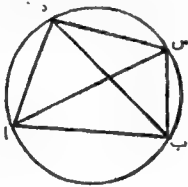


ثم اذا كانت القطعة ب ا ي د اصغر من نصف دائرة . ارم اق الى المركز واخرجه الى س وارسم س ي فالقطعة ب ا د س هي اكبر من نصف دائرة والزواويتان فيها ب ا س ب ي س متساويتان حسبما تقدم وس ب ي د ايضا اكبر من نصف دائرة والزواويتان فيها س ا د س ي د متساويتان ايضا فالكل ب ا د يعدل الكل ب ي د

الفضية الثانية والعشرون . ن

اذا رُسم في دائرة شكل ذو اربعة اضلاع فالزواويتان المتقابلتان منه يعدلان معاً قائمتين

ليكن ا د س ب ذا اربعة اضلاع في دائرة فكل اثنتين متقابلتين من زواياه تعدلان معاً قائمتين . ارم اس ود ب فالزاوية س ا ب تعدل س د ب (ق ٢١ ك ٢) والزاوية اس ب تعدل اد ب فالكل ا د س يعدل الزاويتين س ا ب اس ب . اصف الى كل واحدة منها اب س فلنا اب س مع ا د س تعدل



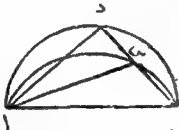
اب س مع س ا ب مع ب س ا وهذه الثلاث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فإذا اب س ا د س معاً تعدلان قائمتين . وهكذا يبرهن ان د ا ب د س ب تعدلان قائمتين

فرع اول اذا اُخرج ضلع من شكل ذي اربعة اضلاع مرسوم في دائرة فالزاوية الخارجة تعدل اللاحقة المتقابلة
فرع ثان شكل ذو اربعة اضلاع كل زاويتين متقابلتين منه لا تعدلان قائمتين لا يرسم في دائرة

الفضية الثالثة والعشرون . ن

لا تكون قطعتان متشابهتان على جانب واحد من خطٍ مستقيم بدون ان تتطابقا

ان كان ممكناً لتكن ا س ب ا د ب قطعتين متشابهتين على جانب واحد من الخط المستقيم ا ب وغير متطابقتين . فمن حيث ان الدائرتين ا د ب ا س ب تقاطعان في ا ب فلا يمكن ان يتقاطعا في نقطة اخرى (ق ١٠ ك ٢) وبالضرورة تقع احدى القطعتين داخل الاخرى ب فلتقع ا س ب داخل ا د ب وارسم الخط ب س د وايضاً س ا و د ا . فمن حيث ان القطعتين متشابهتان اعني تحويان زوايا متساوية (حد ٢ ك ٢) فالزاوية الخارجة ا س ب تعدل الزاوية المقابلة ا د ب وذلك لا يمكن (ق ١٦ ك ١)



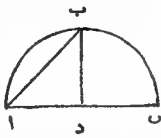
الفضية الرابعة والعشرون . ن

قِطْعَةٌ متشابهة على خطوطٍ مستقيمة متساوية هي متساوية لكن اى ب س ق د قطعتين متشابهتين على خطين مستقيمين متساويين ا ب و س د فهما متساويتان لانه اذا وضعت القطعة اى ب على القطعة س ق د د بحيث تقع النقطة ا على النقطة س والخط ا ب على الخط س د فالتقطعة ب تقع على النقطة د لأن ا ب يعدل س د فبالضرورة تطبق القطعة اى ب على القطعة س ق د (ق ٢٢ ك ٢) فتعدلها



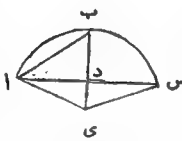
الفضية الخامسة والعشرون . ع

اذا فُرِضَتْ قطعة من دائرة فعليها ان تنمها لكن ا ب س قطعة دائرة فعليها ان تتم الدائرة



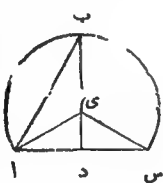
نصف اس في د (ق ١٠ ك ١) ومن د ارم د ب
عموداً على اس (ق ١١ ك ١) وارسم اب

ثم أولاً لتكن الزاويتان اب د ب ا د متساويتين
فالخط ا د يعدل ب د (ق ٦ ك ١) ويعدل د س ايضاً
فالخطوط الثلاثة ا د ب د س هي متساوية فتكون د مركز الدائرة (ق ٩ ك ٢)
واذا جعلت د مركزاً واحداً من هذه الخطوط الثلاثة نصف قطر ثم الدائرة التي
كانت اب س قطعة منها . ومن حيث ان المركز واقع في اس فالقطعة اب س
اما هي نصف دائرة



ثم لتكن الزاويتان اب د ب ا د غير متساويتين
ارسم الزاوية ب ا ي حتى تعدل اب د (ق ٢٢ ك ١)
وان لزم فاخرج ب د الى ي وارسم ي س . فمن حيث
ان ب ا ي تعدل اب ي فالخط ا ي يعدل ب ي

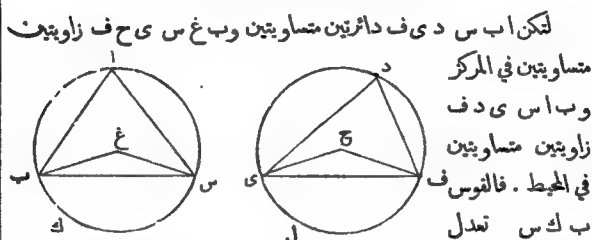
(ق ٦ ك ١) ومن حيث ان ا د يعدل د س و د ي مشترك بين المثلثين ا د ي
س د ي فالضلعان ا د د ي بعدلان الضلعين س د د ي اعني كل واحد يعدل
نظيره والزاوية ا د ي تعدل س د ي لانها قائمتان فالقاعدة ا ي تعدل القاعدة
ي س (ق ٤ ك ١) و ا ي يعدل ب ي حسباً تقدم فالخطوط الثلاثة ا ي ب ي س ي
متساوية وي مركز الدائرة (ق ٩ ك ٢) التي كانت اب س قطعة منها واذا كانت
الزاوية اب د اكبر من ب ا د فالامر واضح ان المركز واقع خارج القطعة اب س
اعني انها اصغر من نصف دائرة



واذا كانت اب د اصغر من ب ا د فالمركز واقع
داخل القطعة اعني هي اكبر من نصف دائرة وهكذا
الدائرة اذا فرضت قطعة منها

القضية السادسة والعشرون . ن

زوايا متساوية في دوائر متساوية هي على أقواس متساوية ان كانت تلك الزوايا في المركز او في المحيط

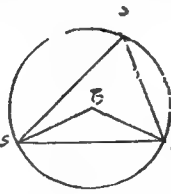
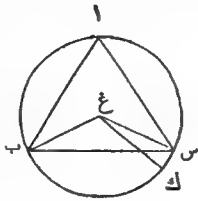


القوس ي ل ف ا ر سم الزاويتين ب س ي ف . فمن حيث ان الدائرتين متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزيها متساوية . فالخطان ب غ س ي عدلان ي ح ح ف والزاوية ب غ س تعدل ي ح ف فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف (ق ٤ ك ١) ومن حيث ان الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالقطعة ب ا س تشابه القطعة ي د ف (حد ١ ك ٢) وهما على الخططين المتساويين ب س ي ف والقطع المتشابهة على خطوط متساوية هي متساوية (ق ٢٤ ك ٢) فالقطعة ب ا س تعدل القطعة ي د ف . ولكن كل الدائرة ب ا س تعدل الكل ي د ف فالبقية ب ك س تعدل البقية ي ل ف

القضية السابعة والعشرون . ن

زوايا واقعة على أقواس متساوية في دوائر متساوية هي متساوية ان كانت في المركز او في المحيط

في الدائرتين المتساويتين ا ب س دى ق لتكن الزاويتان في المركز ب غ س



ي ح ق والزوايتان
في المحيط ب ا س
ي د ق على القوسين
المساويين ب س
ي ق فالزاوية ب غ س

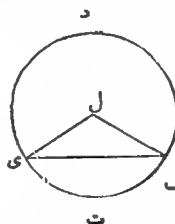
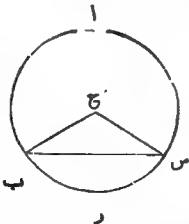
تعدل ي ح ق وب ا س تعدل ي د ق

الزاوية ب غ س اذا عدلت ي ح ق فالامر واضح (ق ٢٠ ك ٢) ان ب ا س
تعدل ي د ق والا فتكون احدها اكبر من الاخرى . لكن ب غ س اكبرها وعلى
النقطة غ من الخط المستقيم ب غ ارم الزاوية ب غ ك حتى تعدل ي ح ق (ق ٢٢
ك ١) . فمن حيث ان الزوايا المتساوية عند المركز هي على اقواس متساوية (ق ٢٦
ك ٢) فالقوس ب ك تعدل القوس ي ق وقد فرض ان ي ق يعدل ب س
فالقوس ب ك تعدل ب س ايضاً اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال . فلا يمكن
ان تكون ب غ س ي ح ق غير متساويتين اي هما متساويتان . والزاوية عند ا
هي نصف الزاوية ب غ س والزاوية عند د هي نصف ي ح ق فالزاوية عند ا
تعدل الزاوية عند د



القضية الثامنة والعشرون . ن

خطوط مستقيمة متساوية في دوائر متساوية تقطع اجزاء متساوية
الاكبر يعدل الاكبر والاصغر يعدل الاصغر



ليكن ب س
ي ف خطين مستقيمين
متساويين في دائرتين
متساويتين ا ب س
د ي ف وليقطعاهما
القوسين الاكبرين

ب ا س ي د ف والاصغرين ب ر س ي ت ف فالقوس ب ا س تعدل ي د ف

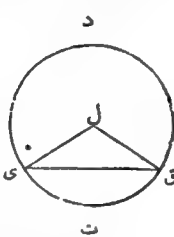
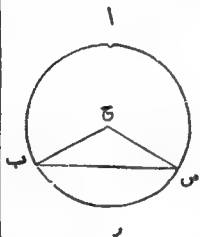
وبرس تعدل ي ت ف

استعلم المراكزين حول (ق ١ ك ٢) وارسم ح ب ح س ل ي ل ف. فمن حيث ان الدائرتين متساويتان فالخطوط المستقيمة المرسومة من مركزيها هي متساوية فالخطان ب ج ح س يعدلان ي ل ل ف. وقد فرض ان القاعدة ب س تعدل القاعدة ي ف فالزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ف (ق ١ ك ٨) والزاويا المتساوية عند المراكزي على اقواس متساوية (ق ٢ ك ٦) فالقوس ب رس تعدل القوس ي ت ف والدائرة ا ب س تعدل الدائرة د ي ف فالباقى با س يعدل الباقي د ف

—•••—

القضية التاسعة والعشرون . ن

اقواس متساوية في دوائر متساوية تقابلها خطوط مستقيمة متساوية لكن ا ب س د ي ق دائرتين متساويتين والقوسان ب رس ي ت ق



متساويتين فالخطان
المستقيمان المقابلان لهما
ب س ي ق ايضاً
متساويان
استعلم المراكزين
حول (ق ١ ك ٢)

وارسم ح ب ح س ل ي ل ق. فمن حيث ان القوس ب رس تعدل القوس ي ت ق والزاوية ب ح س تعدل الزاوية ي ل ق (ق ٢ ك ٦) وح ب ح س يعدلان ل ي ل ق لانها أنصاف اقطار دائرتين متساويتين فالقاعدة ب س تعدل القاعدة ي ق (ق ٤ ك ١)

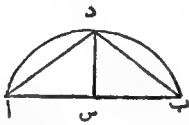
—•••—

القضية الثلاثون . ع

علينا ان ننصف قوساً مفروضاً اي ان نقسمه الى قسمين متماثلين

ليكن ا د ب القوس المفروض . فقلنا ان نصفه

ارسم ا ب ونصفه في س (ق ١٠ ك ١) وارسم
س د عموداً على ا ب وارسم ا د ب فقد تنصف
القوس ا د ب في النقطة د



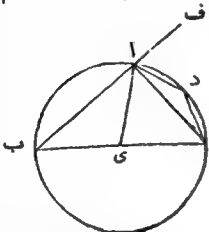
لان اس يعدل س ب وس د مشترك بين المثلثين اس د ب س د والزاوية
اس د تعدل الزاوية ب س د لان كل واحد منهما قائمة فالقاعدة ا د تعدل القاعدة
ب د (ق ٤ ك ١) والمخطوط المستقيمة المتساوية تقطع اقواساً متساوية (ق ٢٨ ك ٢)
والاكبر يعدل الاكبر والاصغر يعدل الاصغر وكل واحد من ا د ب د اصغر من
نصف دائرة لان د س يمر بالمركز (فرع ق ١ ك ٢) فالقوس ا د تعدل القوس ب د
فقد تنصف ا د ب في د

تعلية . وعلى هذه الكيفية كل واحد من النصفين ا د ب ب تنصف ايضاً فيقسم
قوس مفروض الى اربعة او ثمانية اجزاء او الى ستة عشر جزءاً متساوية ولم جراً

الفضية الحادية والثلاثون . ن

الزاوية المرسومة في نصف دائرة هي قائمة والمرسومة في قطعة اكبر من
نصف دائرة هي اصغر من قائمة والمرسومة في قطعة اصغر من نصف
دائرة هي اكبر من قائمة

لتكن ا ب س دائرة وب س قطرها وى مركزها . ارسم س ا الذي يقسم
الدائرة الى قطعتين ا ب س ا د س وارسم ب ا
ا د د س . فالزاوية في نصف الدائرة ب ا س هي
قائمة والزاوية في القطعة ا ب س التي هي اكبر من
نصف الدائرة فاصغر من قائمة والزاوية في القطعة
ا د س التي هي اصغر من نصف الدائرة فاكبر من قائمة
ارسم اى واخرج ب ا الى ف . فمن حيث



ا ب ب س يعدل اى فالزاوية س ا ب تعدل س ب ا (ق ٥ ك ١) ولان س س

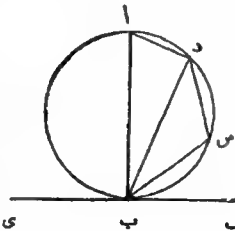
يعدل اى فالزاوية γ س تعدل γ اس فاكلل ب اس يعدل الزاويتين
 اب س اس ب ولكن الزاوية ف اس الخارجة من الثلث اب س تعدل
 الزاويتين اب س اس ب (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ب اس تعدل ف اس وكل
 واحدة منها قائمة (حد ٧ ك ١) فالزاوية ب اس في نصف الدائرة انما هي قائمة
 ومن حيث ان الزاويتين اب س ب اس من الثلث اب س هما معاً اقل
 من قائمتين (ق ١٧ ك ١) وب اس قائمة فتكون اب س اصغر من قائمة فالزاوية في
 القطعة اب س التي هي اكبر من نصف دائرة هي اصغر من قائمة
 ومن حيث ان اب س د هو ذوا ربعة اضلاع في دائرة فكل اثنتيت من
 زواياها المتقابلة تعدلان قائمتين (ق ٢٢ ك ٢) فالزاويتان اب س اد س تعدلان معاً
 قائمتين وقد تبرهن ان اب س اصغر من قائمة فتكون اد س اكبر من قائمة
 فرع: يتضح من هذه القضية ان زاوية واحدة من مثلث ان عدلت بمجموع الاخرتين
 فهي قائمة لان الزاوية التي تليها تعدل الاخرتين ايضاً ومتى كانت الزاويتان المتواليتان
 متساويتين فكل واحدة منهما قائمة

— ١٠٠٢ —

القضية الثانية والثلاثون . ن

اذا مس خط مستقيم دائرة ورسم من نقطة الماسة خط مستقيم قاطع
 الدائرة فالزوايا المحاذية بين الماس والقاطع تعدل الزوايا في القطع
 المتبادلة من الدائرة

ليكن الخط المستقيم γ ف ماساً للدائرة اب س د ومن ب نقطة الماسة لرسم



الخط المستقيم ب د قاطعها فالزاوية ف ب د
 تعدل الزاوية في القطعة د اب المتبادلة
 والزاوية د ب γ تعدل الزاوية في القطعة
 ب س د المتبادلة

من النقطة ب ارسم ب ا عموداً على γ
 ف (ق ١١ ك ١) وفي القوس ب د عين اية

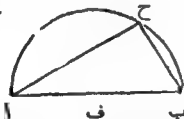
نقطة شئت كالنقطة س وارسم الخطوط المستقيمة ا د د س س ب . فمن حيث ان
الخط المستقيم س ب يمر بالنقطة ب وقد رُسم ب ا عموداً على
المماس من نقطة الماسة فمركز الدائرة في الخط ب ا (ق ١٩ ك ٢) والزاوية ا د ب هي
في نصف دائرة وهي قائمة (ق ٢١ ك ٣) والزاويتان الاخرتان د ا ب ا ب د تعدلان
قائمة (ق ٢٢ ك ١) والزاوية ا ب ف قائمة فتعدل الزاويتين ب ا د ا ب د . اطرح
الزاوية المشتركة ا ب د فالباقية د ب ف تعدل الباقية ب ا د في القطعة المتبادلة
من الدائرة . ومن حيث ان الشكل ا ب س د ذو اربعة اضلاع في دائرة فالزاويتان
المقابلتان ب ا د ب س د معاً تعدلان قائمتين (ق ٢٢ ك ٢) ولذلك تعدلان ايضاً
د ب ف د ب س (ق ١٢ ك ١) وقد تبرهن ان د ب ف تعدل ب ا د فالباقية
د ب س تعدل الباقية ب س د في القطعة المتبادلة من الدائرة

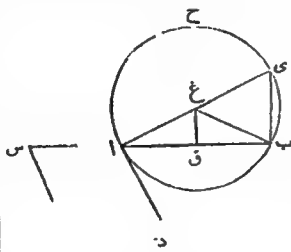


القضية الثالثة والثلاثون . ع

علينا ان نرسم على خطٍ مستقيم مفروض قطعةً دائريةً فيها زاوية
تعدل زاوية بسيطة مفروضة

ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض وس الزاوية المفروضة . علينا ان نرسم على ا ب
قطعة دائرية فيها زاوية تعدل الزاوية عند س
اولاً لتكن الزاوية عند س قائمة .
نصِف ا ب في ف (ق ١٠ ك ١) ثم اجعل ب ا
ف مركزاً و ف ب بعداً وارسم الدائرة ا ح ب فالزاوية ا ح ب انما هي قائمة لانها في
نصف دائرة (ق ٢١ ك ٣) وهي تعدل الزاوية القائمة عند س
ثانياً ان لم تكن الزاوية س قائمة فعند النقطة ا من الخط ا ب اجعل الزاوية
ب ا د تعدل س (ق ٢٢ ك ١) ومن النقطة ا رسم اي عموداً على ا د (ق ١١ ك ١)





نصف آ ب في ق (ق ١٠ ك ١) ومن
ق ا ر م ق غ عموداً على ا ب (ق ١١
ك ١) وار م غ ب . فمن حيث ان
ا ق يعدل ق ب وق غ مشترك بين
المثلثين ا ق غ ب ق غ فالضلعان
ا ق ق غ يعدلان الضلعين ب ق
ق غ والزوايا ا ق غ تعدل ب ق غ

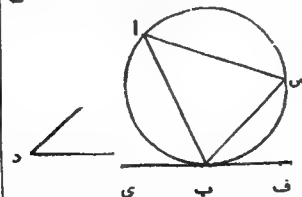
فالقاعدة ا غ تعدل القاعدة غ ب (ق ٤ ك ١) والدائرة المرسومة على المركز غ وعلى
البدع ا تمر في النقطة ب . فلتكن ا ح ب
هذه الدائرة فمن حيث انه قد رُسم ا د عموداً
من طرفه النقط ا ي فهو مماس للدائرة
(فرع اول ق ١٦ ك ٢) ومن حيث انه قد
رُسم القاطع ا ب من نقطة المماس فالزاوية

د ا ب تعدل الزاوية في النقط ا ح ب المتبادلة (ق ٢٣ ك ٢) والزاوية د ا ب تعدل
الزاوية عند س فالزاوية عند س تعدل الزاوية في النقط ا ح ب . فقد رُسم على
الخط المستقيم المفروض ا ب قطعة دائرة فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند س

الفضية الرابعة والثلاثون . ع

علينا ان نقطع من دائرة مفروضة قطعةً فيها زاوية تعدل زاوية بسيطة
مفروضة

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة ود الزاوية البسيطة المفروضة . علينا ان نقطع



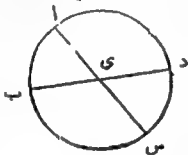
من الدائرة ا ب س قطعةً فيها زاوية
تعدّل الزاوية عند د . ا ر م المماس
ي ف (ق ١٧ ك ٢) حتى يمسّ الدائرة
في النقطة ب ومن النقطة ب في الخط
ي ف اجعل الزاوية ف ب س تعدل د

(ق ٢٢ ك ١) فمن حيث ان الخط المستقيم $ي ف$ يمس الدائرة $ا ب$ نس وقد رُسم من نقطة الماسة الخط $ب س$ قاطعاً فالزاوية $ف ب س$ تعدل الزاوية في القطعة $ب ا س$ المتبادلة (ق ٢٢ ك ٢) والزاوية $ف ب س$ تعدل الزاوية عند $د$ فالزاوية في القطعة $ب ا س$ تعدل الزاوية عند $د$ فقد قُطعت من الدائرة $ا ب س$ القطعة $ب ا س$ فيها زاوية تعدل الزاوية المفروضة عند $د$

القضية الخامسة والثلاثون . ن

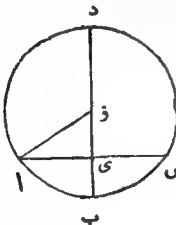
اذا تقاطع خطان مستقيمان في دائرة فالقائم الزوايا مسطح قسي احدهما يعدل القائم الزوايا مسطح قسي الآخر

ليتقاطع الخطان المستقيمان $ا س ب د$ في الدائرة $ا ب س د$ في النقطة $ي$ فالقائم الزوايا $ا ي في س$ يعدل القائم الزوايا $ب ي في د$



اذا مر كل واحد منها في المركز وكان ذلك المركز $ي$ فالامر واضح ان الخطوط $ا ي س ب ي ي د$ متساوية والقائم الزوايا $ا ي في س$ يعدل القائم الزوايا $ب ي في د$

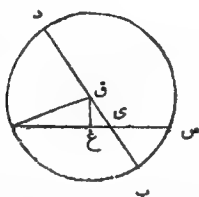
ثم لنفرض مرور احدهما $ب د$ في المركز وليكن عموداً على الآخر $ا س$ الذي لا يمر بالمركز وليقطعه في النقطة $ي$. فاذا تنصف $ب د$



في $ق$ فالتقطه $ق$ هي مركز الدائرة (فرع ق ١ ك ٢) ارم $ا ق$. فمن حيث ان الخط $ب د$ المار بالمركز هو عمود على $ا س$ الذي لا يمر بالمركز ويقطعه في $ي$ فالقسمان $ا ي س$ متساويان (ق ٢ ك ٢) ومن حيث ان الخط المستقيم $ب د$ قد انقسم الى قسمين متساويين في $ق$

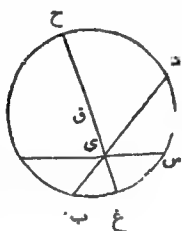
وغير متساويين في $ي$ (ق ٥ ك ٢) فالقائم الزوايا $ب ي خ ي د$ + $ي ق$ = $ق ب$ = $ا ق$ ولكن $ا ق$ = $ا ي$ + $ي ق$ (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا $ب ي خ ي د$ + $ي ق$

$\text{اي}^2 + \text{ي}^2 = \text{ق}^2$ اطرح ي^2 ق من الجانين فالباقي $\text{ب}^2 \text{ ي}^2 \text{ خ}^2 = \text{اي}^2 = \text{اي}^2 \text{ خ}^2$
 $\text{ي}^2 \text{ س}$



ثم لنفرض ان ب^2 الذي يمر بالمركز ينقطع اس
 الذي لا يمر بالمركز في النقطة ي^2 ولكنه ليس عموداً
 عليه. فاذا تنصف ب^2 في ق^2 فالنقطة ق^2 هي مركز
 الدائرة. ارم اق^2 ومن ق^2 ارم $\text{ق}^2 \text{ غ}^2$ عموداً على اس^2
 (ق ٢ ك ١) فالقسم اغ^2 يعدل القسم س^2 (ق ٢ ك ٢)

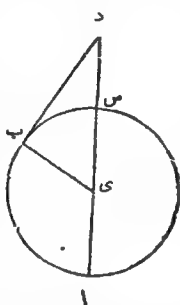
فالقائم الزوايا $\text{اي}^2 \text{ خ}^2 \text{ س}^2 + \text{ي}^2 \text{ غ}^2 = \text{اغ}^2$. اضع اليها $\text{غ}^2 \text{ ق}^2$ فالقائم الزوايا اي^2
 $\text{خ}^2 \text{ س}^2 + \text{ي}^2 \text{ غ}^2 + \text{اغ}^2 \text{ ق}^2 = \text{اغ}^2 \text{ ق}^2 + \text{اغ}^2 \text{ ق}^2 + \text{اغ}^2 \text{ ق}^2 = \text{اغ}^2 \text{ ق}^2 + \text{اغ}^2 \text{ ق}^2 + \text{اغ}^2 \text{ ق}^2 =$
 $\text{ي}^2 \text{ ق}^2$ فالقائم الزوايا $\text{اي}^2 \text{ خ}^2 \text{ س}^2 + \text{ي}^2 \text{ ق}^2 = \text{اغ}^2 \text{ ق}^2 = \text{ق}^2 \text{ ب}^2 \text{ وق}^2 \text{ ب}^2 = \text{ب}^2 \text{ ي}^2$
 $\text{خ}^2 \text{ د}^2 + \text{ي}^2 \text{ ق}^2$ (ق ٢ ك ٢) فالقائم الزوايا $\text{اي}^2 \text{ خ}^2 \text{ س}^2 + \text{ي}^2 \text{ ق}^2 = \text{ب}^2 \text{ ي}^2 \text{ خ}^2$
 $\text{ي}^2 \text{ د}^2 + \text{ي}^2 \text{ ق}^2$. اطرح $\text{ي}^2 \text{ ق}^2$ من الجانين فالباقي $\text{اي}^2 \text{ خ}^2 \text{ س}^2 = \text{ب}^2 \text{ ي}^2 \text{ خ}^2 \text{ د}^2$



اخيراً ان لم يمر احد الخطين المستقيمين اس
 ب^2 في المركز فاستعلم المركز ق^2 ومن ي^2 نقطة
 تقاطع الخطين اس ب^2 دارم القطر $\text{غ}^2 \text{ ق}^2$
 فكما تقدم $\text{اي}^2 \text{ خ}^2 \text{ س}^2 = \text{غ}^2 \text{ ي}^2 \text{ خ}^2 \text{ ح}^2 \text{ وب}^2 \text{ ي}^2$
 $\text{خ}^2 \text{ د}^2 - \text{غ}^2 \text{ ي}^2 \text{ خ}^2 \text{ غ}^2$ فحسب الاولى الاولى اي^2
 $\text{خ}^2 \text{ س}^2 = \text{ب}^2 \text{ ي}^2 \text{ خ}^2 \text{ د}^2$

القضية السادسة والثلاثون . ن

اذا رسم من نقطة خارج دائرة خطان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة
 والاخر يمسها فالقائم الزوايا مسطح كل الخط القاطع في القسم منه الواقع
 خارج الدائرة يعدل مربع الخط المماس

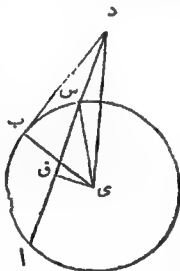


لتكن د نقطة خارج الدائرة ا ب س وليُرم منها
الخط المستقيم د س ا حتى يقطع الدائرة والخط المستقيم
د ب حتى يسها فالقائم الزوايا ا د X د س يعدل
مربع د ب

اولاً لنفرض ان d س ا يمر بالمركز ا. س م ي ب
فالزاوية ي ب د انما هي قائمة (ق ٨ ك ٢) ومن حيث
ان الخط المستقيم ا س قد تنصف في و اخرج الى د
فالقائم الزوايا ا د x د س + س ي = د (ق ٦ ك ٢)

وی س = ی ب فالقائم الزوايا ا د X د س + ی ب = ی ذ ولكن ی ذ = ی ب +
ب ذ (ق ٤٧ ك ١) فالقائم الزوايا ا د X د س + ی ب = ی ب + ب ذ ا طرح
من الجانین ی ب فالباقي ا د X د س = ب ذ

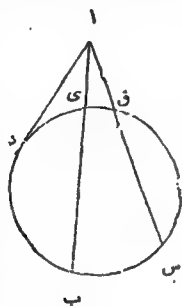
ثانيًا ان لم يردس ا في مركز الدائرة ا ب س فاستعلم المركزى (ق ا ك ٢)



وإرمى ق عموداً على اس (ق ١٢ ك ١) وإرمى ب
 ى س ى د. فن حيث ان الخط المستقيم المار بالمركز
 ى ق هو عمود على الخط المستقيم اس الذي لا يمر
 بالمركز فهو ينصفه ايضاً (ق ٢ ك ٢) فالقسم اق يعدل
 القسم ق س. فن حيث ان الخط المستقيم اس قد
 تنصف فى ق واخرج الى د (ق ٦ ك ٢) فالقائم الزوايا
 ا د س + ق س = ق د. أضف اليها ق ى فالقائم

[illegible]

فرع اول اذ اُرْم من نقطۃ خارج دائرة خطان فاطمان مثل اب اس



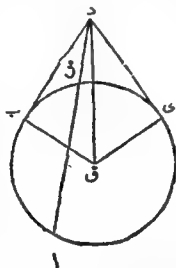
فالشكلان القائمان الزوايا مسطحا كل خط في القسم من
الواقع خارج الدائرة هما متساويان فالقائم الزوايا ب ا
 $\angle ا ب ق = \angle ا ب د$ لان كل واحد منها يعدل مربع
الخط المستقيم ا د الذي يمس الدائرة
فرع ثانٍ . ماسان مرسومان من نقطة واحدة
هما متساويان

فرع ثالث. بما ان نصف القطر الواقع على نقطة
الماسة هو عمود على الماس فبالضرورة الزاوية الواقعة
بين ماسين مرسومين من نقطة واحدة تنصف بخط مستقيم مرسوم من مركز الدائرة
الى تلك النقطة لانه وتر مشترك بين مثلثين متساويين قائمي الزاوية

القضية السابعة والثلاثون . ن

اذا رُسم من نقطة خارج دائرة خطان مستقيمان احدهما يقطع الدائرة
والآخر يلاقيها فالقائم الزوايا مسطح كل الخط القاطع في الجزء منه
الواقع خارج الدائرة ان عدل مربع الخط الذي يلاقيها فذلك الخط
ماس الدائرة

لتكن د نقطة خارج الدائرة ا ب دى وليرسم منها الخط المستقيم د س ا حتى
يقطع الدائرة والخط المستقيم د ب حتى يلاقيها فالقائم
الزوايا ا د س ان عدل مربع د ب فالخط د ب
يمس الدائرة



ارسم الخط المستقيم دى حتى يمس الدائرة (ق ١٧)
ك (٢) واستلم المركز ق ولرسم ق ب ق دى فالزاوية
ق دى د قائمة (ق ١٨ ك ٢) ومن حيث ان دى يمس
الدائرة ا ب س ود س ا يقطعها فالقائم الزوايا ا د س

د س يعدل مربع دى (ق ٢٦ ك ٢) وقد فرض ان القائم الزوايا ا د س يعدل

مربع د ب فربع دى يعدل مربع د ب والمخط المستقيم دى يعدل المخط المستقيم د ب . وقى = ق ب فالخطان دى قى يعدلان د ب ب ق والقاعدة د ق مشتركة بين المثلين د ب ق دى ق فالزاوية دى ق تعدل الزاوية د ب ق (ق ٨ ك ١) ولكن دى ق انما هي قائمة فالزاوية د ب ق ايضاً قائمة وب ق اذا أُخرج يكون قطراً للدائرة والمخط الذي يُحدث مع القطر من طرفي زاوية قائمة فهو ممس الدائرة (ق ٦ ك ٣) فالخط د ب هو ممس الدائرة ا ب س

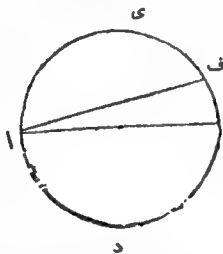
—1001—

مضافات الى الكتاب الثالث

قضية ١٠ ن

قطر الدائرة يقسمها ومحيطها الى قسمين متماثلين . وبالقلب الخط الذي يقسم الدائرة الى قسمين متماثلين هو قطر

ليكن ا ب قطر الدائرة اى ب د فالقسمان اى ب ا د ب متماثلان محيطاً ومساحة . فان وضع الشكل اى ب على الشكل ا د ب وبقيت قاعدتها المشتركة ا ب على وضعها فالخط المنحني اى ب يقع على الخط المنحني ا د ب والا لكانت في احدهما نقط ب مختلفة البعد عن المركز وذلك خلاف حد الدائرة وبالقلب الخط الذي يقسم الدائرة الى قسمين متماثلين هو قطر



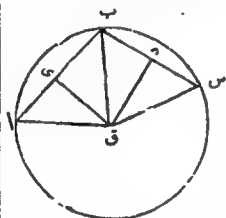
لنفرض ان ا ب يقسم الدائرة اى ب د الى قسمين متماثلين فان لم يكن المركز في ا ب فليُرسَم ا ف ماراً في المركز . فهو اذا قطر ويقسم الدائرة الى قسمين متماثلين . فالقسم اى ب يعدل القسم اى ب ف وذاك محال فرج قوس وترها قطر في نصف محيط . والشكل المحاط بهذه القوس مع وتره هو نصف دائرة

—1002—

قضية ب. ن

يمكن ان تُرسم دائرة واحدة محيطها مارٌ بثلاث نقطٍ مفروضة ان لم تكن في خطٍ واحد مستقيم . ولا تُرسم الا دائرة واحدة محيطها مارٌ بهذه النقط الثلاث

لكن اب س النقط الثلاث المفروضة ولا تكون في خطٍ واحد مستقيم فهي في محيط دائرة واحدة



ارسم اب وب س ونصفها في دوى بالعمودين د ق ي اللذين لابد من التقاءهما في نقطة ما كالنقطة ق . لانه لو كانا متوازيين لكاتب د ب ب ي متوازيين ايضاً (فرع ٢ ق ٢٩ ك ١) او كانا في خطٍ واحد مستقيم ولكنهما

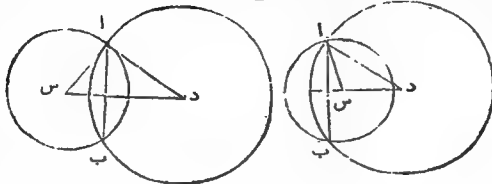
التقاء في ب واب س ليس خطاً مستقيماً حسب المفروض اولاً . ارسم ق ا ق س ق ب . فمن حيث ان ق ا ق ب يلاقيان اب على بعدٍ واحدٍ من العمود فيها متساويان . ولهذا السبب ق ب ق س متساويان ايضاً فالنقط الثلاث اب س في على بعدٍ واحد من النقطة ق وواقعة في محيط دائرة مركزها ق ونصف قطرها ق الامر واضح انه لا يبرهن هذه النقط محيط آخر . لان المركز واقع في العمود د ق الذي ينصف الوتر اب . وهو ايضاً في العمود ق ي الذي ينصف الوتر ب س (فرع اق ٢ ك ٢) فلا بد من وقوعه عند نقطة تقاطع هذين العمودين وحيث لا يكون الا مركز واحد لا يكون الا محيط واحد

قضية ج. ن

اذا تقاطعت دائرتان فالخط المستقيم المار بمركزيهما هو عمودٌ على الوتر الموصل بين نقطتي التقاطع وينصفه

لكن بس د الخط المعتمد الموصل بين مركزي دائرتين متقاطعتين . فهو

عمود على الوتراب الموصل بين نقطتي التقاطع



لأن
المخطّاب
الموصل
بين
نقطتي

التقاطع هو وتر مشترك بين الدائرتين وإذا رُسم عمود من وسط هذا الوتر يمر بكل واحد من المراكزين س ود (فرع ١ ق ٢ ك ٢) ولا يمكن أن يرسم أكثر من خط واحد مستقيم ماراً بنقطتين مفروضتين . فالخط المار بمركزيهما ينصف الوتر ويحدث معه قائمتين أي يكون عموداً عليه

فرع ٢ . الخط المستقيم الموصل بين نقطتي تقاطع دائرتين هو عمود على الخط المستقيم الموصل بين مركزيهما

تعلية . أولاً . اذا تقاطعت دائرتان فالبعد بين مركزيهما هو اقصر من مجموع نصفتي قطريهما . ونصف القطر الاطول هو اقصر من مجموع نصف القطر الاقصر مع البعد بين المراكزين . لأن س د هو اقصر من س ا + ا د (ق ٢٠ ك ١) واد > اس + س د

ثانياً . بالقلب . اذا كان البعد بين مركزي دائرتين اقل من مجموع نصفتي قطريهما وكان نصف القطر الاطول اقصر من نصف القطر الاقصر مع البعد بين المراكزين فالدائرتان تتقاطعان

لانه لكي يكون التقاطع ممكناً يلزم ان يكون الثلث س ا د ممكناً ولذلك يلزم ان يكون س د > اس + ا د وان يكون نصف القطر الاطول ا د > اس + س د . واذا كان الثلث اس د ممكناً فالامر واضح ان الدائرتين المرسوميتان على المراكزين س ود تتقاطعان في ا ب

فرع اول . اذا كان البعد بين مركزي دائرتين اكثر من مجموع نصفتي قطريهما فالدائرتان لا تتقاطعان

فرع ثان . اذا كان البعد بين المراكزين اقل من فصلة نصفتي القطرين فالدائرتان لا تتقاطعان . لأن اس + س د < ا د فاقاس د < ا د - اس أي ضلع من مثلث

هو أطول من فضلة الضلعين الآخرين . فالمثلث غير ممكن متى كان البعد بين
المركزين أقل من فضلة نصفي القطرين فلا يمكن عند ذلك ان تقاطع الدائرتان

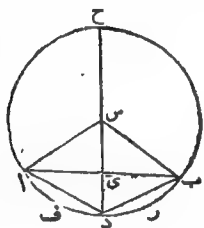
— — —

قضية د . ن

في دائرة واحدة الزوايا المتماثلة في المركز تقابلها اقواس متماثلة وبالعكس

الاقواس المتماثلة تقابل الزوايا المتماثلة في المركز

لتكن س مركز الدائرة . والزوايا اس د فلتعدل ب س د . فالتوس ا ف د



التي تقابل الزاوية الواحدة تعدل القوس ب ر د
التي تقابل الزاوية الأخرى

ارسم ا د و د ب . فالمثلثان اس د ب س د
هما متساويان لأن ضلعين وزاوية من الواحد تعدل
ضلعين وزاوية من الآخر فاذا وضع احدهما على
الآخر يتطابقان والنقطة ا تقع على النقطة ب .
والنقطة د انما هي مشتركة بين القوسين . فطرفا

التوس ا ف د يقعان على طرفي القوس ب ر د فلا بد من مطابقة بقية اجزائها لأنها
على بعدي واحد من المركز

وبالعكس لنفرض مساواة القوسين ا ف د ب ر د . فالزاوية اس د ب س د
لأنه اذا وضعت احدي القوسين على الأخرى تتطابقان . وطرفا الوتر ا د يقعان
على طرفي الوتر ب د فالوتران متساويان (ق ٨ ك ١) والزاوية اس د ب س د
فرع أول الزوايا المتساوية في المركز يقابلها اوتار متساوية . وبالعكس
الاورار المتساوية تقابل زوايا متساوية في المركز

فرع ثانٍ الاوتار المتساوية تقابل اقواساً متساوية . وبالعكس الاقواس
المتساوية تقابل اوتاراً متساوية

فرع ثالث اذا تنصفت الزاوية في المركز فالتوس والوتر اللذان يقابلانها
يتنصفان ايضاً

فرع رابع العمود على وسط الوتر ينصف الزاوية في المركز ويبرأ ايضاً بوسط

القوس التي يقابلها الوتر

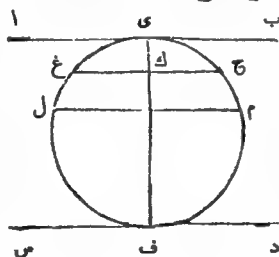
تعليقة المركز س والنقطة ي التي هي وسط الوتر اب والنقطة د التي هي وسط القوس التي يقابلها الوتر المذكور هي تلك نقط في خط عمودي على الوتر . ولكن الخط المستقيم يتعين وضعة بنقطتين . فكل خط يمر باثنتين من هذه النقط الثلاث يمر بمثلها ايضا ويكون عموداً على الوتر

قضية ه . ن

قوسان بين خطين متوازيين هما متساويان . وبالعكس اذا وقع بين خطين مستقيمين غير متقاطعين في الدائرة قوسان متساويان فالخطان متوازيان

لهذه القضية ثلاثة احوال

الاول متى كان الخطان المتوازيان ماسين مثل اب وس د . فكل واحد من القوسين بينها نصف دائرة لأن نقطتي الماسة هما طرفا القطر (فرع ٣ ق ١٦ ك ٢) الثاني متى كان احد الخطين ماساً مثل اب والاخر وترًا مثل غ ح . وهو عمود على ف ي الذي ينصف القوس غ ي ح (فرع ٤ ق د ك ٢) فالقوسان بينها غ ي ح ي متساويان



ثالثاً متى كان الخطان المتوازيان وترين مثل غ ح ول م فلنفرض ان القطر ف ي عمود على غ ح . فيكون عموداً على ل م ايضا لانها متوازيان . والقطر ينصف كل واحد من القوسين اللتين تقابلان

هذين الوترين اي غ ي = ح ي ول ي = م ي فبالضرورة ل ي = غ ي = م ي - ح ي اي غ ل = ح م .

ثم بالقلب . اذا كان الخطان اب س د ماسين وكان القوسان ي ل ف ي م ف متساويين يكون ي ف قطراً (ق ١ ك ٢) واب س د متوازيين (فرع ٣ ق ١٦ ك ٢)

وإذا كان أحدهما a b ماساً والآخر g h قاطعاً وكان القوسان g h y x متساويين يكون القطر f y الذي ينصف القوس g h y x عموداً على وتر g h (تعليقة ق د ك ٢٢) وعلى ماس a b فيها متوازيان

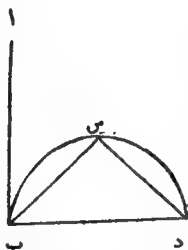
وإذا كان كلا الخطين قاطعاً مثل g h y x ول m وكان القوسان g h y x متساويين فلنفرض ان القطر f y ينصف أحدهما مثل g h y x في k فهو ينصف القوس g h y x أيضاً أي y g $-$ y h $-$ وقد فُرض ان g h y x $-$ h m فالكل y $-$ الكل y m فالوتر l m قد تنصف بالنظر f y . فقد تنصف كلا الوترين بالنظر f y وهما اذا ذاك عمودان عليه ومتوازيان (فرع ق ٢٨ ك ١)

تعليقة. لا بد ان يشترط في هذه القضية ان الخطين لا يقطعان في الدائرة لأن خطين مستقيمين مارّين في g m وح l يقطعان اقواساً متساوية g h m ولا يكونان متوازيين

قضية و. ع

علينا ان نرسم ماساً في نقطة مفروضة من قوس دائرة بدون استعمال

المركز



لتكن b a النقطة المفروضة. قس جزئين متماثلين من القوس مثل b s s d . ارم b d وايضاً الوترين b s s d واجعل الزاوية s b a تعدل s b d (ق ٢٢ ك ١) فيكون الخط المستقيم b a المماس المطلوب

لأن الزاوية s b d $=$ s d b فالزاوية s b a $=$ s d b (ق ٢٢ ك ٢) التي هي النقطمة المتبادلة فاذا b a هو ماس في النقطة b

اصول الهندسة

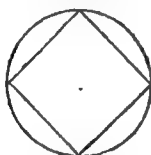
الكتاب الرابع

حدود

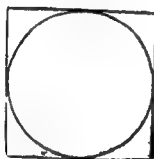


١ في شكلين اضلاعها مستقيمة متى كانت زوايا احدهما في اضلاع الآخر يقال ان الواحد مرسوم في الآخر

٢ اذا مرّت اضلاع شكل في زوايا شكل آخر يقال ان الواحد يحيط بالآخر

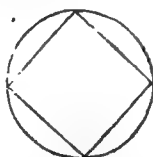


٣ متى كانت زوايا شكل ذي اضلاع مستقيمة في محيط دائرة يقال ان الشكل مرسوم في الدائرة



٤ شكل ذو اضلاع مستقيمة يحيط بدائرة متى كانت اضلاعه مماسات لمحيط الدائرة

٥ اذا مرّ محيط دائرة كلّ ضلع من اضلاع شكل ذي اضلاع مستقيمة يقال انها مرسومة في الشكل



٦ الدائرة تحيط بشكل ذي اضلاع مستقيمة متى مرّ محيطها بزوايا الشكل

٧ اذا انتهى طرفا خط مستقيم في محيط دائرة يقال انه موضوع او مرسوم في الدائرة

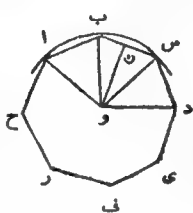
٨ شكل ذو زوايا كثيرة متى كان له خمسة اضلاع يسمى ذا خمس زوايا ويسمى ذا ست زوايا متى كانت اضلاعه ستة وذا سبع زوايا متى كانت اضلاعه سبعة ولم جراً
٩ شكل ذو زوايا كثيرة اذا كانت اضلاعه وزواياه متساوية يسمى قياسياً

سابقة

يمكن ان يُرسم في دائرة او محيطاً بها اي شكل ذي اضلاع كثيرة

قياسي فرض

ليكن ا ب س ي ح شكلاً قياسياً ذا اضلاع كثيرة مرسوم دائرة محيطها ماراً بالنقطة
الثلاث ا ب س (ق ب مضافات ك ٢) ومركزها النقطة
و وليكن ون عموداً من المركز على وسط ب س مرسوم
او دو



فاذا وُضع ذو الاضلاع الاربعة ون س د على
ذوي الاضلاع الاربعة ون ب ا يتطابقان. لانّ الضلع
ون مشترك بين الشكلين والزوايا ون س = ون ب

لانها قائمتان . والضلع ن س يقع على الضلع ن ب والنقطة س تقع على النقطة ب
لانّ ن س = ن ب. وبما ان الشكل قياسي فالزاوية ن س د = ن ب ا فالشكلا يتطابقان
يقع على ب ا والنقطة د تقع على النقطة ا لانّ س د = ب ا . فالشكلا يتطابقان
والخط و د = و ا فالمحيط الذي يمر ايضاً في النقطة ا ب س يمر ايضاً في النقطة د .
وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان المحيط المار في ب س يمر في ي ايضاً وفي كل زوايا
الشكل المفروض فهو اذا مرسوم في الدائرة

ثم اذا تمّ الشكل والدائرة كما تقدم نرى الاضلاع ا ب س س د الى آخره
انها اوتار متساوية وهي على بعد واحد من المركز (ق ١٤ ك ٢) فاذا جعلت النقطة و
مركزاً والعمود ون بعداً ورسمت دائرة فمحيطها يمرّ بالضلع ب س في وسطه وهكذا في
جميع اضلاع الشكل فترسم الدائرة في الشكل او الشكل حول الدائرة
فرع اول . اذا فرض شكل قياسي فيمكن ان ترسم دائرة فيه واخرى محيطة به
ويكون لهما مركز واحد

فرع ثان . اذا امكن ان ترسم دائرة في شكل مفروض واخرى محيطة به
فالشكل قياسي

تعليقة اولى . النقطة وهي مركز الدائرتين اي المحيطة بالشكل والمرسومة فيه وفي
ايضاً مركز الشكل . ونسى الزاوية ا ب س الزاوية في المركز وهي مصطنعة من نصفي

قطرين مرسومين من طرفي الضلع اب
بما ان كل الاوتار متساوية فكل الزوايا في المركز متساوية . فستعلم كمية كل
واحدة منها بقسمة اربع زوايا قائمة على عدد اضلاع الشكل
تعلية ثمانية . اذا اردنا ان نرسم شكلاً قياسياً مفروضاً عدد اضلاعه في دائرة
مفروضة فلتقسم محيط الدائرة الى اقسام متساوية تماثل عدد اضلاع الشكل (انظر
الشكل في ق ١٥ ك)

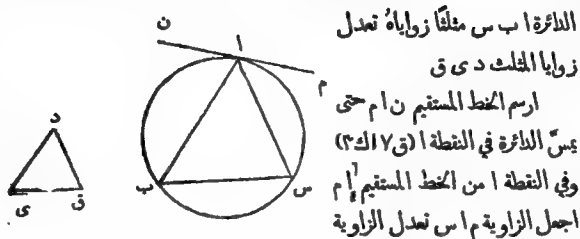
القضية الاولى . ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة خطاً مستقيماً يماثل خطاً مستقيماً
مفروضاً ليس اطول من قطر الدائرة

لكن اب س الدائرة المفروضة ود الخط المستقيم المفروض
ارسم ب س قطر الدائرة اب س ثم اذا
ماثل ب س الخط د فقد تم العمل لانه قد
وضع في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل د . والآن
فالخط ب س اطول من د . اقطع الجزء
س ي حتى يماثل د (ق ١٥ ك) واجعل س
مركزاً وس ي بعداً وارسم الدائرة ا ي ق وارسم الخط س ا . فبما ان س مركز الدائرة
ا ي ق فالخط اس يعدل س ي . ولكن س ي يعدل د فالخط س ا يعدل د ايضاً
فقد رُسم في الدائرة خطاً مستقيماً يماثل الخط المستقيم المفروض د الذي ليس اطول
من قطر الدائرة

القضية الثانية . ع

علينا ان نرسم في دائرة مفروضة مثلثاً زواياه تماثل زوايا مثلث مفروض
لكن اب س الدائرة المفروضة ود ي ق المثلث المفروض . علينا ان نرسم في

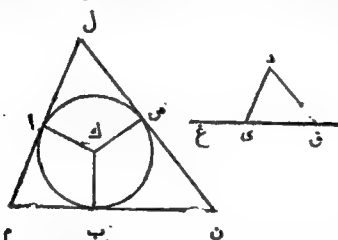


د ق ي (ق ٢٣ ك ١) وفي النقطة ا من الخط المستقيم ا ن اجعل الزاوية ن ا ب
تعدل د ق ي ولرسم ب س . لأنّ الخط ن ا م يمسّ الدائرة ا ب س واس يقطعها
فالزاوية م ا س تعدل ا ب س في القطعة المتبادلة (ق ٢٣ ك ٢) وم ا س تعدل
د ق ي فالزاوية ا ب س تعدل د ق ي ولهذا السبب ا س ب تعدل د ق ي فالزاوية
الباقية من الواحد ب ا س تعدل الباقية من الاخرى د ق ي (فرع ٤ ق ٢٣ ك ١)
فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ق ي وقد رُسم في الدائرة ا ب س

القضية الثالثة . ع

علينا ان نرسم مثلثاً يحيط بدائرة مفروضة وزواياه تعدل زوايا مثلث
مفروض

لتكن ا ب س الدائرة المفروضة وليكن د ق ي المثلث المفروض . علينا ان



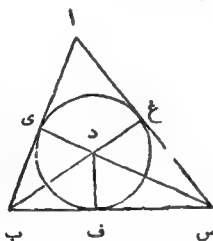
(ق ١ ك ٣) ومن ك ارسم خطاً مستقيماً كفا شئت مثل ك ب وفي النقطة ك من
الخط ك ب اجعل الزاوية ب ك ا تعدل الزاوية د ق ي غ (ق ٢٣ ك ١) وايضاً

الزاوية ب ك س تعدل الزاوية د ق ح . وفي النقط الثلاث ا ب س ارسم المماسات
ل ا م م ب ن ن س ل (ق ١٧ ك ٢)
لأن م ل م ن ن ل مماسات في النقط ا ب س التي قد رُسم اليها من المركز
ك ا ك ب ك س فالزوايا عند هذه النقط الثلاث انما هي قائمات (ق ١٨ ك ٢)
والشكل ا ك ب م ذو اربعة اضلاع وهو قابل الانقسام الى مثلثين فزواياه الاربعة
تعدل اربع زوايا قائمة . وك ا م ك ب م قائمتان فالآخران ا ك ب ب م تعدلان
قائمتين والزاويتان د ي غ د ي ق تعدلان قائمتين (ق ١٢ ك ١) فالزاويتان ا م ب
ا ك ب تعدلان د ي غ د ي ق . ولكن ا ك ب تعدل د ي غ فالأخرى ا م ب
تعدل الأخرى د ي ق وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان الزاوية ل ن م تعدل د ق ي
فالباقية من الواحد تعدل الباقية من الآخر اي م ل ن تعدل ي د ق (ق ٢٢ ك ١)
فالمثلث ل م ن قد رُسم محيطاً بالدائرة ا ب س وزواياه تعدل زوايا المثلث د ي ق

الفضية الرابعة . ع

علينا ان نرسم دائرة في مثلث مفروض

ليكن ا ب س المثلث المفروض . فعلينا ان نرسم فيه دائرة



نصف الزاويتين ا ب س ا س ب (ق ٩

ك ١) بالمخطين المستقيمين ب د س والمقاطعين

في النقطة د . ومن دارسم المخطوط د ي د ف

د غ عمودية على الاضلاع ا ب س س ا

ثم لأن الزاوية ي ب د تعدل ف ب د من

حيث ان ا ب س تنصفت بالمخط ب د ولان

القائمة ب ي د تعدل القائمة ب ف د فالمثلث ي ب د له زاويتان تعدلان زاويتين

من المثلث ف ب د والضلع ب د الذي يقابل زاويتين متساويتين مشترك بين

المثلثين . فالضلعان الآخران من الواحد يعدلان الآخرين من الآخر (ق ٢٦ ك ١)

اي د ي يعدل د ف وهكذا يبرهن ايضا ان د غ يعدل د ف والمخطوط الثلاثة د غ

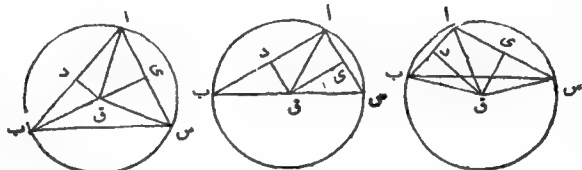
د ف د ي متساوية واذا رسمت دائرة من المركز د وعلى بعد د ي يمر المحيط في طرفي

د ف ودغ ايضاً ويمس الاضلاع اب ب س س الان الزوايا عند هذه النقطى
ف غ هي قائمات . والخط المستقيم العمودي على طرف النظر هو ماس (فرع اول ق
١٦ ك) فالخطوط الثلاثة اب ب س س انمس الدائرة فقد رسمت الدائرة في
المثلث اب س

القضية الخامسة . ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمثلث مفروض

ليكن اب س المثلث المفروض . فعلينا ان نرسم دائرة تحيط به



نصف اب واس في دوى (ق ١٠ ك) ومن هاتين النقطتين ارم د ق
ي ق عمودين على اب واس (ق ١١ ك) فاذا اخرج د ق ي ق بفتيات وال
فهما متوازيان واب واس العموديان عليها متوازيان ايضاً وذلك محال . فلنفرض
التقاءهما في ق وارسم ق ا وان لم تكن النقطة ق في الخط ب س فارسم ب ق س ق
لان ا د يعدل د ب ود ق مشترك بين المثلثين وعمود على اب فالقاعدة ا ق
تعدل القاعدة ب ق (ق ٤ ك) وهكذا يبرهن ان س ق يعدل ا ق ولذلك ب ق
يعدل س ق والخطوط الثلاثة ق ا ق ب ق س متساوية واذا جعلت النقطة ق
مركزاً واحداً من هذه الخطوط بعداً فمحيط الدائرة تمر بطرفي الآخرين وترسم حول
المثلث

فرع . متى وقع مركز الدائرة داخل المثلث كانت كل واحدة من زواياه اصغر
من قائمة لان كل واحدة منها في نقطة اكبر من نصف دائرة . ومتى كان المركز في احد
الاضلاع فالزاوية المقابلة قائمة لانها في نصف دائرة . ومتى وقع المركز خارج المثلث
فالزاوية المقابلة للضلع الذي كان المركز خارجه اكبر من قائمة لانها في قطعة اصغر

من نصف دائرة . فاذا كان المثلث المفروض حادّ الزوايا يقع المركز داخله وإذا كان ذا قائمة يقع المركز في الضلع الذي يقابل القائمة وإذا كان منفرج الزاوية يقع المركز خارج الضلع الذي يقابل المنفرجة .

تعلية

(١) يتضح من هذه القضية ان المخطوط الثلاثة العمودية على اواسط اضلاع مثلث تلتقي في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث

(٢) بموجب هذه القضية تُرسم قطعة من قنطرة وترها وعلوها مفروضان



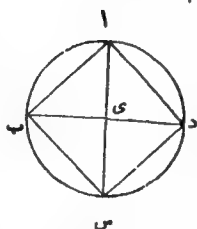
ليكن ا ب وترها والعمود على وسطها علوها .
ارسم ا د ب و نصفها في م ون ومن م ون ا رسم
عمودين ل م ل ن المتقيين في ل مركز الدائرة .
فالخطوط ل ب ل د ل ا متساوية والحلول بين
حجارة القنطرة هي كائما متقطعة من انصاف اقطار الدائرة

— ١٠٣ —

القضية السادسة . ع

علينا ان نرسم مربعاً في دائرة مفروضة

لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة . فعلياً ان نرسم فيها مربعاً



ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد
منها عموداً على الآخر وارسم ا ب ب س س د دا
النقطة ي هي مركز الدائرة ولذلك ب ي
يعدل ي د وقد جعل ا ي عموداً على ب د والمثلثان
ا ب ي ا د ي لما الضلع المشترك ا ي فالقاعدة ا ب
تعادل القاعدة ا د (ق ٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان

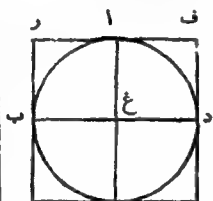
ب س وس د يعادلان ا ب او ا د فالشكل ا ب س د متساوي الاضلاع . وهو
ايضاً قائم الزوايا . لانّ ب د قطرب ا د نصف دائرة فالزاوية ب ا د قائمة (ق ٢١
ك ٢) هكذا يبرهن ايضاً ان ا ب س ب س د س د ا قائمات فالشكل ا ب س د
قائم الزوايا وقد يبرهن انه متساوي الاضلاع فهو مربع وقد رُسم في الدائرة ا ب س د

تعلية. الثالث اى د قائم الزاوية ومتساوي الساقين فلنا (فرع ٣ ق ٤٧ ك ١)
 ا د اى ١:٣٦:١ اى ضلع مربع في دائرة الى نصف القطر كجذرائين المائي الى واحد

القضية السابعة . ع

علينا ان نرسم مربعاً محيطاً بدائرة مفروضة

ليكن ا ب س د الدائرة المفروضة . فعلياً ان نرسم مربعاً محيطاً بها



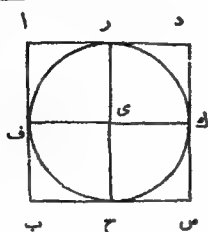
ارسم القطرين ا س ب د واجعل كل واحد منها عموداً على الآخر . وفي النقط ا ب س د ارسم المماسات ر ف ر ح ك ك ف (ق ١٧ ك ٢) لأن ر ف ممس الدائرة وقد رُسم غ ا من المركز الى نقطة الماسة فالزوايا ر غ ا قائمتان (ق ١٨ ك ٢)

وهكذا يبرهن ان الزوايا عند ب وس ود قائمتان . فبما ان ا غ ب قائمة و غ ب ر كذلك فالخط ر ح يوازي ا س وهكذا يبرهن ان ا س يوازي ف ك وان ر ف و ح ك يوازيان ب د فالاشكال ر ك س ا ك ف ب ب ك هي متوازية الاضلاع و ر ف يعدل ح ك (ق ٢٤ ك ١) و ر ح يعدل ف ك . ومن حيث ان ا س يعدل ب د و يعدل ر ح و ف ك ايضاً و ب د يعدل ر ف و ح ك فالخطان ر ح ف ك يعدلان ر ف ا و ح ك فالشكل ف ر ح ك متساوي الاضلاع . وهو ايضاً قائم الزوايا لأن ر ب غ ا متوازي الاضلاع و ا غ ب قائمة تكون ا ر ب ايضاً قائمة (ق ٢٤ ك ١) وهكذا يبرهن ان كل واحدة من الزوايا عند ح وك و ف قائمة فالشكل ف ر ح ك قائم الزوايا وقد تبين انه متساوي الاضلاع فهو مربع وقد رُسم محيطاً بالدائرة ا ب س د

القضية الثامنة . ع

علينا ان نرسم دائرة في مربع مفروض

ليكن ا ب س د المربع المفروض . فعلياً ان نرسم فيه دائرة

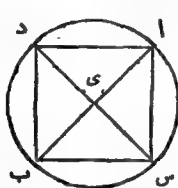


نصف الضلع اب في ف والضلع اد في ر
(ق ١٠ ك ١) ومن ر ارم رح حتى يوازي اب ان
دس ومن ف ارم ف ك حتى يوازي اد اوب س
فكل واحد من الاشكال اك كب اح ح د اى
ى س بى ى د متوازي الاضلاع واضلاعاها
المقابلة متساوية (ق ٢٤ ك ١) فمن حيث ان اد
يعدل اب وار نصف اد واف نصف اب فالضرورة ا ر يعدل اف فالضلعان
المقابلان لهذين متساويان ايضا اي ف ى يعدل ى ر وهكذا يبرهن ان ى ح وى ك
يعدلان ف ى ا وى ر فالخطوط الاربعة ى ر ى ف ى ح ى ك متساوية والدائرة
المرسومة على المركز ى وعلى بعد احدها هذه الخطوط تثر باطراف الآخر. وفي نفس
الاضلاع الاربعة ايضا لان الزوايا عند ر ف ح ك قائمات (ق ٢٤ ك ١) والخط
العمودي على طرف القطر انما هو ماس (ق ١٦ ك ٢) فكل واحد من الخطوط
الاربعة اب ب س س د د ا ماس الدائرة فقد رسمت الدائرة في المربع المفروض

القضية التاسعة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بمربع مفروض

ايكن اب س د المربع المفروض فعلينا ان نرسم دائرة تحيط به



ارسم اس ب د المتقاطعين في ى. فلان دا
يعدل اب والخط اس مشترك بين المثلثين د اس
ب س ا فالضلعان دا اس يعدلان ب ا اس
والقاعدة دس تعدل القاعدة ب س فالزاوية د اس
تعدل ب اس (ق ٨ ك ١) فقد تنصفت الزاوية د اب س
بالخط اس وهكذا يبرهن ان الزوايا اب س ب س د س دا قد تنصفت
بالخط ب س المستقيمين اس ب د. فلكون الزاوية د اب س تعدل اب س
وى اب نصف د اب وى ب ا نصف اب س فالزاوية ى اب س تعدل ى ب ا
والضلع اى يعدل الضلع بى (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ى س ى د يعدلان

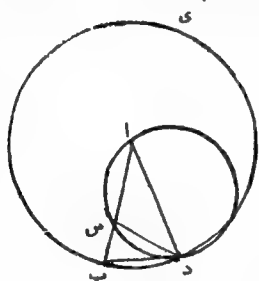
اى اوبى فالخطوط الاربعه اى بى سى د متساوية والدائرة المرسومة على المركزى وعلى بعد احد هذه المخطوط تمر باطراف الأخر ونحيط بالمربع اب س د

القضية العاشرة . ع

علينا ان نرسم مثلثا متساوي الساقين وكل واحدة من الزاويتين عند

القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

افرض خطا مستقيما مثل اب واقسمه (ق ١١ ك ٢) في س الى قسمين حتى ان القائم الزوايا اب خ ب س يعدل مربع اس واجعل ا مركزا واب بعدا وارسم الدائرة ب دى . واجعل فيها (ق ٤ ك ٤) الخط المستقيم ب د حتى يعدل اس الذي



ليس اطول من قطر الدائرة ب دى . ارسم دا د س . وارسم الدائرة اس د نحيط بالمثلث ا د س (ق ٥ ك ٤) فالمثلث اب د هو المطلوب اى كل واحدة من الزاويتين اب د ا د ب مضاعف الزاوية ب ا د

لأن القائم الزوايا اب خ ب س يعدل مربع اس واس يعدل ب د فالقائم الزوايا

اب خ ب س يعدل مربع ب د . ولأنه قد رُسم الخط المستقيم ب س ا والخط المستقيم ب د من النقطة ب خارج الدائرة اس د الواحد قاطع الدائرة والآخر يلاقيها والقائم الزوايا اب خ ب س مسطح كل القاطع في الجزء منه الواقع خارج الدائرة يعدل مربع ب د الذي يلاقي الدائرة اس د فالخط ب د ماس للدائرة اس د (ق ٢٧ ك ٢) ولأن ب د ماس ود س قاطع من نقطة الماسة فالزاوية ب د س (ق ٢٢ ك ٢) تعدل الزاوية د اس في القطعة المتبادلة من الدائرة . أضف الى كل واحدة منها الزاوية س د ا فكل الزاوية ب د ا تعدل الزاويتين س د ا د اس . ولكن الزاوية الخارجة ب س د (ق ٢٢ ك ١) تعدل الزاويتين س د ا د اس فالزاوية ب د ا تعدل ب س د . ولكن ب د ا تعدل س ب د لأن الساق ا د يعدل الساق اب (ق ٥ ك ١) فالزاوية س ب د ا د ب ا تعدل ب س د فالزوايا الثلاث

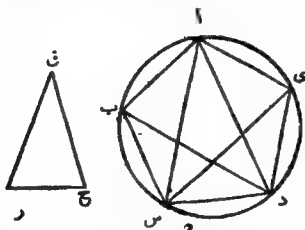
ب د ا د ب ا ب س د متساوية . ولأن الزاوية د ب س تعدل ب س د فالضلع
ب د يعدل الضلع س د (ق ٦ ك ١) وب د يعدل اس ولذلك س د يعدل اس
ايضاً والزاوية س د ا تعدل س ا د (ق ٥ ك ١) وس د ا س ا د معاً مضاعف
س ا د . ولكن ب س د تعدل س د ا س ا د (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ب س د
مضاعف س ا د . وب س د تعدل كل واحدة من الزاويتين ب د ا د ب ا فكل
واحدة من هاتين مضاعف الزاوية ب ا د فقد رُسم مثلث متساوي الساقين وكل
واحدة من الزاويتين عند القاعدة مضاعف الزاوية الثالثة

فرع أول . الزاوية ب ا د هي خمس قائمتين . لأن كل واحدة من ا ب د
ا د ب مضاعف ب ا د فيها معاً تعدلان اربعة امثال ب ا د والثلاث زوايا معاً
تعدل خمسة امثال ب ا د والثلاث معاً تعدل قائمتين اي خمسة امثال ب ا د تعدل
قائمتين او ب ا د تعدل خمس قائمتين

فرع ثان . لان ب ا د خمس قائمتين او عشر اربع قائمات فكل الزوايا في
المركز ا تعدل معاً عشرة امثال ب ا د وتقبل الانقسام الى عشرة اقسام كل واحد
يعدل ب ا د وهذه الزوايا العشر في المركز تقابلها عشرة اقواس متساوية فالقوس
ب د هي عشر المحيط والخط المستقيم ب د او اس يعدل ضلعاً من ذي عشرة
اضلاع مرسوم في الدائرة ب د ي

الفضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع في دائرة مفروضة
لتكن ا ب س د ي الدائرة المفروضة . فعلينا ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا



خمس اضلاع . ارم مثلثاً متساوي
الساقين ق ر ح له كل واحدة من
الزاويتين عند القاعدة اي عند ر
وح مضاعف الزاوية عند ق (ق ١٠
ك ٤) وفي الدائرة ا ب س د ي ارم
المثلث المتساوي الساقين ا س د

زواياة نمائل زوايا المثلث ق رح (ق ٢ ك ٤) اي الزاوية س ا د نمائل الزاوية عند ق والزاوية ا س د نمائل الزاوية عند ر و ا د س نمائل الزاوية عند ح . فكل واحدة من الزاويتين ا س د ا د س في مضاعف س ا د نصفها بالمخطين المستقيمين س ي د ب (ق ١ ك ١) وارسم ا ب ب س ا ي د فالشكل ا ب س د ي هو الشكل المطلوب ذو خمسة اضلاع قياسي*

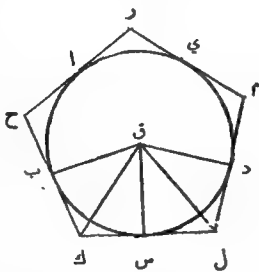
بما ان كل واحدة من الزاويتين ا س د ا د س مضاعف س ا د وقد تنصنا بالمخطين المستقيمين د ب س ي فالزوايا الخمس د ا س ا س ي س د س د ب ب د ا متساوية . والزوايا المتساوية تقابلها اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٢) فالاقواس الخمسة ا ب ب س س د د ي ا متساوية . والاقواس المتساوية تقابلها خطوط متساوية (ق ٢٩ ك ٣) فالخطوط ا ب ب س س د د ي ا متساوية والشكل ا ب س د ي ذو خمسة اضلاع متساوية . وهو ايضا متساوي الزوايا لان القوس ا ب تعدل القوس د ي . فاذا اُضيف اليها ب س د فلكل ا ب س د يعدل الكل ي د س ب . والزاوية ا ي د واقفة على القوس ا ب س د والزاوية ب ا ي على القوس ي د س ب . فالزاوية ب ا ي تعدل الزاوية ا ي د (ق ٢٧ ك ٣) وهكذا يبرهن ان الزوايا ا ب س ب س د د ي تعدل ب ا ي او ا ي د فالشكل ا ب س د ي متساوي الزوايا وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة اضلاع قياسي وقد رُسم في الدائرة المفروضة

طريقة اخرى . اقسم نصف قطر الدائرة المفروضة حتى ان القائم الزوايا مسطح كل الخط في احد القسمين يعدل مربع القسم الاخر (ق ١١ ك ٢) وارسم خطاً يعدل اكبر القسمين على جانبي نقطة مفروضة في الدائرة المفروضة فكل واحد منها يقطع قوساً عشر المحيط (فرع ٢ ق ١٠ ك ٤) فالقوسان معاً خمس المحيط ووتره ضلع شكل ذي خمسة اضلاع قياسي في الدائرة

القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع محيطاً بدائرة مفروضة
لتكن ا ب س د الدائرة المفروضة . علينا ان نرمس شكلاً قياسياً ذا خمسة اضلاع

بمحيط بها



لكن زوايا شكل قبايمي ذي خمسة
اضلاع في الدائرة في النقط ا ب س د ي
فالاقواس ا ب ب س س د د ي متساوية
(ق ١١ ك ٤) وفي النقط ا ب س د ي
ارسم الخطوط ر ح ح ك ك ل ل م م ر
حتى تمس الدائرة (ق ١٧ ك ٣) استعمل المركز
ق وارسم ق ب ق ك ق س ق ل ق د

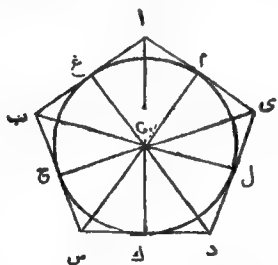
فبا ان الخط المستقيم كل يمس الدائرة ا ب س د ي في النقطة س التي
رُسم اليها ق س من المركز فالخط ق س عمود على كل (ق ١٨ ك ٢) والزوايتان
عند س قائمتان. وهكذا يبرهن ايضا ان الزوايا عند ب ود قائمتان. ولكون
ق س ك قائمة فمربع ق ك يعدل مجموع مربعي ق س س ك (ق ٤٧ ك ١)
ولكون ق ب ك قائمة فمربع ق ك يعدل مربعي ق ب ب ك فمربع ق س س ك
يعدلان مربعي ق ب ب ك. ومربع ق س يعدل مربع ق ب فالباقى مربع س ك
يعدل الباقي مربع ب ك والخط س ك يعدل الخط ب ك. وبما ان ق س
يعدل ق ب وق ك مشترك بين المثلثين ق س ك ق ب ك فالضلعان ب ق
ق ك يعدلان الضلعين س ق ق ك والقاعدة س ك تعدل القاعدة ب ك. فالزاوية
ب ق ك تعدل الزاوية س ق ك (ق ٨ ك ١) وب ك ق تعدل س ك ق. فكل
الزاوية ب ق س هي مضاعف ك ق س وب ك س مضاعف ق ك س. وهكذا
يبرهن ان الزاوية س ق د مضاعف س ق ل وس ل د مضاعف س ل ق.
ولكون القوس ب س يعدل القوس س د فالزاوية ب ق س تعدل س ق د
(ق ٢٧ ك ٣) وب ق س مضاعف ك ق س وس ق د مضاعف س ق ل فالزاوية
ك ق س تعدل س ق ل. والقائمة ق س ك تعدل القائمة ق س ل فالمثلثان
ق ك س ق ل س لهما زاويتان من الواحد تعدلان زاويتين من الآخر والضلع
ق س مشترك بينهما فالمثلثان متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك س يعدل الضلع
س ل والزاوية ق ك س تعدل ق ل س. ولكون ك س يعدل س ل فالخط
ك ل مضاعف ك س. وهكذا يبرهن ان ح ك مضاعف ب ك. ولكن ب ك

يعدل ك س كما قد تبين سابقاً فالخط ك ل يعدل ح ك (اولية ٦) وهكذا يبرهن
ان رح ر م ل تعدل ح ك او ك ل . فالشكل رح ك ل م ذو خمسة اضلاع
متساوية وزواياه متساوية ايضاً لان الزاوية ق ك س تعدل ق ل س وح ك س
مضاعف ق ك س وك ل م مضاعف ق ل س كما تقدم برهانه فالزاوية ح ك ل
تعدل ك ل م . وهكذا يبرهن ان ل م ر م رح ك ل تعدل ح ك ل او ك ل م .
فالزوايا الخمس متساوية وقد تبين ان الشكل متساوي الاضلاع فهو ذو خمسة
اضلاع قياسي محيطة بالدائرة المفروضة

القضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع
ليكن ا ب س د ي الشكل المفروض . علينا ان نرسم في دائرة

نصف الزاويتين ب س د د ي بالخطين المستقيمين س ق د ق . ومن
ق نقطة التقائهما ارم المخطوط المستقيمة ق ب ق ا ق ي . فلكون ب س يعدل
س د وق س مشترك بين المثلثين
ب س ق د س ق فالضلعان ب س
س ق يعدلان الضلعين د س س ق
والزاوية ب س ق تعدل الزاوية د س ق .
فالقاعدة ب ق تعدل القاعدة ق د (ق ٤)
ك ا) وبقية الزوايا من الواحد تعدل بقية
الزوايا من الآخر فالزاوية س ب ق تعدل



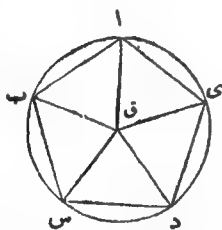
س د ق . ولان س د ي مضاعف س د ق وس د ي تعدل س ب اوس د ق =
س ب ق فالزاوية س ب ا مضاعف س ب ق فالزاوية ا ب ق تعدل س ب ق .
فالزاوية ا ب س قد تنصفت بالخط المستقيم ب ق . وهكذا يبرهن ان ب ا ي ا د
تنصفتا بالخطين المستقيمين ا ق ي ق

ثم من النقطة ق (ق ١٢ ك ا) ارم ق غ ق ح ق ك ق ل ق م عمودية
على المخطوط المستقيمة ا ب س د د ي ي ا . فن حيث ان الزاوية
ح س ق تعدل ك س ق والقائمة ق ح س تعدل القائمة ق ك س والضلع ق س

مشترك بين المثلثين فالضلع الثالث ق ح يعدل الثالث ق ك (ق ٢٦ ك ١) وهكذا
يبرهن ان ق ل ق م ق غ تعدل ق ح اوق ك فالخطوط الخمسة المذكورة متساوية.
فالدائرة المرسومة على المركز ق وعلى بعد احد هذه الخطوط تمرُّ باطراف الآخر
وتس الخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ي ا. ومن حيث ان الزوايا عند
النقط غ ح ك ل م قائمات فالخطوط الخمسة ا ب ب س س د د ي ا هي
عمودية على اطراف انصاف الاقطار فهي ماسآت (فرع ١ ق ١٦ ك ٢) فقد رُسِّمت
الدائرة في الشكل المفروض

القضية الرابعة عشرة. ع

علينا ان نرسم دائرة تحيط بشكل قياسي مفروض ذي خمسة اضلاع
ليكن ا ب س د ي شكلاً مفروضاً قياسياً ذا خمسة اضلاع. فعلينا ان نرسم دائرة
تحيط به



نصف الزاوية ب س د بالخط المستقيم
س ق والزاوية س د ي بالخط المستقيم د ق
(ق ٩ ك ١) ومن ق نقطة التقائهما ارسم الخطوط
المستقيمة ق ب ق ا ق ي الى النقط ب و ا و ي.
فيبرهن كما في القضية السابقة ان الزوايا س ب ا
ب ا ي ا ي د قد تنصفت بالخطوط المستقيمة

ق ب ق ا ق ي. ومن حيث ان الزاوية ب س د تعدل س د ي والزاوية
ق س د انما هي نصف ب س د وس د ق نصف س د ي فالزاوية ق س د تعدل
س د ق فالضلع ق س يعدل الضلع ق د (ق ٦ ك ١) وهكذا يبرهن ان ق ب
ق ا ق ي تعدل ق س اوق د فهذه الخطوط الخمسة المستقيمة متساوية واذا جعلت
النقطة ق مركزاً واحداً هذه الخطوط بعداً ورُسِّمت دائرة فمحيطها يمرُّ باطراف الآخر
وهي تحيط بالشكل القياسي ذي الخمسة الاضلاع ا ب س د ي

القضية الخامسة عشرة . ع

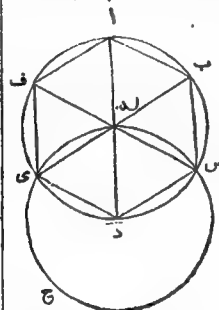
علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا ستة اضلاع في دائرة مفروضة
 لكن اب س د ي ف الدائرة المفروضة . فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا
 ستة اضلاع

استعمل المركز غ وارسم القطر ا غ د واجعل د مركزاً ود غ بعداً وارسم الدائرة
 ي غ س ح . ارسم الخط ي غ والخط غ س واخرجهما الى ب وف . ثم ارسم المخطوط
 المستقيمة اب ب س د د ي ي ف ف ا

فالشكل ذو الستة اضلاع اب س د د ي ي ف هو
 قياسي اي اضلاعه وزواياه متساوية

من حيث ان النقطة غ هي مركز الدائرة
 اب س د ف فالخط غ ي يعدل الخط غ د ولأن
 د مركز الدائرة غ س ح ي فالخط د ي يعدل د غ
 فالخط غ ي يعدل ي د والثلاث ي غ د هو
 متساوي الاضلاع وزواياه الثلاث متساوية (فرع

ق ٥ ك ١) وزوايا كل مثلث تعدل قائمتين (ق ٢٢ ك ١) فالزاوية ي غ د هي ثلث
 قائمتين . وهكذا يبرهن ان الزاوية د غ س ثلث قائمتين . ومن حيث ان الخط المستقيم
 غ س احدث مع ي ب الزاويتين المتواليين ي غ س س غ ب حتى تعدلا قائمتين
 (ق ١٢ ك ١) فالزاوية س غ ب تعدل ثلث قائمتين . فالزوايا الثلاث ي غ د
 د غ س س غ ب متساوية . والزوايا المتقابلة ب غ ا غ ف ف غ ي (ق ١٥
 ك ١) متساوية ايضاً . فالزوايا الست ي غ د د غ س س غ ب ب غ ا غ ف
 ف غ ي متساوية . والزوايا المتساوية في المركز تقابلها اقواس متساوية (ق ٢٦ ك ٣)
 والاقواس المتساوية تقابلها مخطوط مستقيمة متساوية (ق ٢٩ ك ٣) فالخطوط الستة
 اب ب س د د ي ي ف ف ا متساوية . والشكل ذو الستة اضلاع
 اب س د ي ف متساوي الاضلاع . وهو متساوي الزوايا ايضاً . لأن القوس ا ف
 تعدل القوس ي د فاذا اضيف الى كل واحد منها القوس اب س د فالكل ف ا
 ب س د تعدل الكل ي د س ب ا . والزاوية في د هي على القوس فاب س د

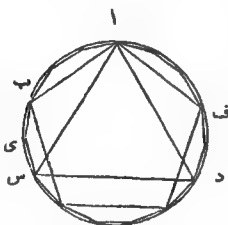


والزاوية ا ف ي هي على القوس ي د س ب ا فالزاوية ا ف ي تعدل الزاوية
ف ي د وهكذا يبرهن في بقية زوايا الشكل انها تعدل ا ف ي او ف ي د فالشكل
ا ب س د ي ف متساوي الزوايا . وقد تبرهن انه متساوي الاضلاع فهو قياسي
وقد رُسم في الدائرة المفروضة ا ب س د ي ف
فرع . ضلع شكل ذي ستة اضلاع قياسي في دائرة يعدل نصف قطر الدائرة
واذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في النقط ا ب س د ي ف يحدث شكل
قياسي ذو ستة اضلاع محيط بالدائرة وعلى هذا الاسلوب تُرسم دائرة في شكل قياسي
مفروض ذي ستة اضلاع او محيطه يوحسبها تقدم في ذي خمسة اضلاع

—••••—

القضية السادسة عشرة . ع

علينا ان نرسم شكلاً قياسياً ذا خمسة عشر ضلعاً في دائرة مفروضة
لكن ا ب س د الدائرة المفروضة . فعلياً ان نرسم فيها شكلاً قياسياً ذا خمسة
عشر ضلعاً



ليكن ا س ضلع مثلث متساوي الاضلاع
في الدائرة (ق ٢ ك ٤) و ا ب ضلع شكل قياسي
ذي خمسة اضلاع في الدائرة (ق ١١ ك ٤) .
فالقوس ا ب س هي ثلث المحيط او $\frac{1}{3}$ من
المحيط والقوس ا ب هي خمس المحيط اي $\frac{2}{5}$
من المحيط فالقوس ب س فضلها وهو $\frac{1}{10}$ من

المحيط . نصف ب س في ي (ق ٢٠ ك ٢) فكل واحد من ب ي ي س هو $\frac{1}{10}$
من المحيط فاذا رُسم الخطان المستقيمان ب ي ي س ووضع امثالهما في دائرة المحيط
(ق ١ ك ٤) يحدث شكل قياسي ذو خمسة عشر ضلعاً في الدائرة

اذا رُسم خطوط مستقيمة تمس الدائرة في زوايا الشكل المذكور يحدث شكل قياسي
ذو خمسة عشر ضلعاً محيط بالدائرة . وعلى هذا الاسلوب ايضاً حسبها تقدم في شكل ذي
خمس اضلاع تُرسم دائرة في شكل قياسي مفروض ذي خمسة عشر ضلعاً او محيطه يوحسبها

تعليقة

اذا رُسم في دائرة شكل قياسي ذو اضلاع كثيرة وتنصبت الافواس التي تقابل
اضلاعه فيحدث شكل قياسي عدد اضلاعه مضاعف عدد اضلاع الاول . وهكذا
من المربع في دائرة يحدث اشكال ذات ثمانية اضلاع او ستة عشر ضلعاً او ٢٢
ضلعاً او ٦٤ ضلعاً الى آخره . ومن ذي ستة اضلاع في دائرة يحدث شكل ذو ١٢
او ٢٤ او ٤٨ او ٩٦ ضلعاً الى آخره . ومن ذي عشرة اضلاع يحدث
شكل ذو ٢٠ او ٤٠ او ٨٠ ضلعاً الى آخره . ومن
ذي خمسة عشر ضلعاً يحدث شكل ذو ٣٠
او ٦٠ ضلعاً الى آخره . ولكن الى
الآن لم توجد طريقة لرسم
شكل قياسي ذي
سبعة اضلاع
في دائرة



اصول الهندسة

الكتاب الخامس

حدود

١ المقدار هو ما كان له واحد أو أكثر من ثلاثة اشياء وهي طول وعرض وعمق فاذا فُرض مقداران أكبر واصغر وكان الاصغر قياساً تاماً للأكبر اي وُجد فيه مراراً معلومة بدون باقٍ فالاصغر جزء الأكبر

٢ اذا كان اصغر مقدارين قياساً تاماً لأكبرها فالأكبر مضروب الاصغر

٣ التناسب هو التفاوت بين مقدارين من جنسٍ واحدٍ باعتبار الكمية

٤ المقادير هي من جنس واحد متى امكن زيادة الاصغر حتى يزيد عن

الأكبر والتناسب لا يقع إلا بين المقادير المتجانسة

٥ اذا فُرض اربعة مقادير وضرب الاول والثالث مراراً ما وضرب الثاني والرابع مراراً ما فاذا عدل الثالث الرابع عند ما عدل الاول الثاني أو كان أكبر منه عند ما كان الاول أكبر من الثاني أو اصغر منه عند ما كان الاول اصغر من

الثاني فيقال ان نسبة الاول الى الثاني كنسبة الثالث الى الرابع

٦ المقادير المتناسبة هي التي كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث

الى الرابع ونسب الثالث الى الرابع مثل تناسب الخامس الى السادس ولم جراً

نسبة الف الى باء كنسبة سين الى دال وتكتب هكذا ا:ب::س:د أو ا:ب=

س:د

٧ اذا فُرض اربعة مقادير كما في المحدث الخامس وقاس الاول الثاني مراراً

أكثر ما يقبس الثالث الرابع يقال ان تناسب الاول الى الثاني هو اعظم من تناسب

الثالث الى الرابع وان تناسب الثالث الى الرابع هو اصغر من تناسب الاول الى الثاني
٨ متى تعددت المقادير وكان تناسب الاول الى الثاني يماثل تناسب الثاني
الى الثالث وتناسب الثاني الى الثالث يماثل تناسب الثالث الى الرابع وهلم جرا
يقال انها على نسبة متصلة

٩ متى كانت ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان الثاني متناسب متوسط
بين الآخرين

١٠ اذا تعددت المقادير المتجانسة كما في الحد الثامن يقال ان تناسب الاول
الى الاخير هو مركب من تناسب الاول الى الثاني مع تناسب الثاني الى الثالث مع
تناسب الثالث الى الرابع وهلم جرا الى الاخير

فلو فرض اربعة مقادير ا ب س د يقال ان تناسب ا الى د هو
مركب من تناسب ا الى ب مع تناسب ب الى س مع تناسب س الى د واذا فرض
ا:ب::ب:س::س:د::د:هـ فتناسب ا الى د هو مركب
من تناسب ا الى ب مع ب الى س مع س الى د ومن تناسبات تعدل المذكورة
كتناسب س الى ف و غ الى ح وك الى ل

وهكذا اذا فرض بين م ون التناسب الواقع بين ا و د . فلاجل الاختصار
يقال ان التناسب بين م ون مركب من التناسبات التي تركب منها التناسب بين
ا و د اي من تناسب س الى ف و غ الى ح وك الى ل

١١ متى كانت ثلاثة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى
الثالث هو مضاعف تناسب الاول الى الثاني . فاذا فرض ا:ب::ب:س
فتناسب ا الى س هو مضاعف تناسب ا الى ب . وحسب الحد السابق تناسب ا الى
س هو مركب من تناسب ا الى ب وب الى س فالتناسب المركب من تناسبتين
مماثلين هو مضاعف كل منهما

١٢ متى كان اربعة مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى
الرابع هو ثلاثة امثال تناسب الاول الى الثاني او الثالث الى الرابع واذا كان
خمس مقادير على نسبة متصلة يقال ان تناسب الاول الى الخامس هو اربعة امثال
تناسب الاول الى الثاني او الثاني الى الثالث وهلم جرا الى النهاية . فالتناسب
المركب من ثلاث تناسبات مماثلة هو ثلاثة امثال كل منها والمركب من اربع تناسبات

هو اربعة امثال كل منها ولم جراً

١٣ في اربع متناسبات تسمى الاولى والثالثة السابقين والثانية والرابعة التالين
والسابق مع تاليهما المتناسبان والسابقان معاً او التالين معاً المتشابهان

١٤ التبادل في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الاول الى الثالث كالثاني

الى الرابع (ق ١٦ كه)

١٥ القلب في اربعة مقادير متناسبة هو ان يكون الثاني الى الاول كالرابع

الى الثالث (قضية الف كه)

١٦ التركيب هو متى كان اربعة مقادير متساوية وكان الاول مع الثاني الى

الثاني كاللثالث مع الرابع الى الرابع (ق ١٨ كه)

١٧ القسمة هي متى كان اربعة مقادير متناسبة وكانت زيادة الاول عن الثاني

الى الثاني كزيادة الثالث عن الرابع الى الرابع (ق ١٧ كه)

١٨ الطرح هو متى كان اربعة مقادير متناسبة وكان الاول الى زيادته عن

الثاني كاللثالث الى زيادته عن الرابع (ق د كه)



اوليات

١ اذا ضرب مقادير متساوية في كميات متساوية بقي متساوية

٢ المقادير التي تقسم مقادير متساوية مراراً متساوية هي متساوية

٣ مضروب لمقدار اعظم هو اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار اصغر

٤ اذا كان مضروب لمقدار اعظم من ذات هذا المضروب لمقدار آخر فالمقدار

الاول اعظم من الثاني



الفضية الاولى . ن

اذا فرضت عدة مقادير قابلة الانقسام على عدة اخرى من المقادير

مراراً معلومة كل واحد على نظيره فحسبما يتعدد كل من المقسومات

عليها في مقسومه هكذا يتعدد مجتمع المقسومات عليها في مجتمع المقاسم
(انظر كتاب علم الجبر ع ١٧٧)

نفرض المقادير ا و ب وس قابلة الانقسام مراراً معلومة على المقادير
د و ي و ف كل واحد على نظيره فالججمع د + ي + ف يتعدد في الججمع ا + ب + س
كما يتعدد د في ا

نفرض ان د يتعدد في ا ثلاث مرات وهكذا ي في ب وف في س
فلكون ا بعدد ثلاث مرات لنا

$$1 = د + د + د$$

$$ب = ي + ي + ي$$

$$س = ف + ف + ف$$

وايضاً

وايضاً

وبإضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية (اولية ١٢١ ك) ا + ب + س يعدل د +
ي + ف ثلاث مرات وهكذا لو تعددت د و ي و ف في ا و ب وس أكثر او اقل
من ثلاث مرات

فرع. اذا فرضنا م عدداً ما كان م د + م ي + م ف = م (د + ي + ف) لأن
م د م ي م ف هي تعداد د ي ف مراراً تماثل م فجمعها يتعدد ايضاً مراراً تماثل م

الفضية الثانية . ن

اذا ضرب مقدار في عدد ما واضيف الى الحاصل المقدار ذاته مضروباً
في عدد آخر فالججمع بعد ذلك المقدار مراراً تماثل الاحاد في مجتمع
المضروبين فيها . (انظر كتاب الجبر ع ١٨٧)

نفرض ا = م س وب = ن س فحينئذ ا + ب = (م + ن) س
لأن ا = م س لنا ا = س + س + س الخ م مرة وايضاً ب = س + س + س
س الخ ن مرة . فبإضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية ا + ب = س متعددة
م + ن مرة اي ا + ب = (م + ن) س اي ا + ب يعدس مراراً تماثل الاحاد في م + ن
فرع أول . هكذا ما تعددت المضارب فلو فرض ا = م ي وب = ن ي
وس = ف ي لنا ا + ب + س = (م + ن + ف) ي

فرع ثانٍ. وممكناً من حيث ان $a + b + s = m + n + f$ ي وقد فُرض
 $a = m$ ي وب n ي وس $f = n$ ي لنا $m + n + f = m + n + f$ ي

القضية الثالثة . ن

اذا فُرض ثلاثة مقادير وتعدّد الثاني في الاول مراراً تماثل الآحاد في
 عددٍ ما وتعدّد الثالث في الثاني مراراً تماثل الآحاد في عددٍ ما
 فالثالث يتعدّد في الاول مراراً تماثل الآحاد في حاصل هذين
 العددين . (انظر كتاب الجبر ع ١٨٢)

لنفرض $a = m$ ب وب $n = s$ فحينئذٍ $a = m$ ن س
 لانه حسب المفروض $b = n$ س فلذلك $m = n$ س + ن س + الح م مرة
 ون س + ن س + الح م مرة يعدل س في ن + ن + الح م مرة (فرع ثانٍ ق ٢ كه)
 ون مضافة الى ذاتهما م مرة يعدل ن في م اي م ن فأننا ن س + ن س + الح م مرة
 يعدل م ن س فأننا م ب = م ن س وقد فُرض $a = m$ ب فأننا $a = m$ ن س

القضية الرابعة . ن

اذا فرضت اربعة مقادير متناسبة اي نسبة الاول الى الثاني كنسبة
 الثالث الى الرابع وضرب الاول والثالث في عددٍ ما وضرب الثاني
 والرابع في عددٍ ما فتكون نسبة مضروب الاول الى مضروب الثاني
 كنسبة مضروب الثالث الى مضروب الرابع (انظر كتاب الجبر ع ١٨٢)

لنفرض $a : b :: s : d$. وليكن م ون عددين فحينئذٍ $a : n :: b : m$ ن د
 ليتعدّد م ا و م س مراراً تعدل الآحاد في ف وليتعدّد ن ب ون د مراراً
 تعدل الآحاد في ق فلنا (ق ٢ كه) ف م ا ف م س وايضاً ق ن ب وق ن د . فلكون
 $a : b :: s : d$ حسب المفروض وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث

اي ف م ا ف م س ومن الثاني والرابع اي ق ن ب ق ن د . فاذا كان ف م ا اكبر
من ق ن ب يكون ف م س اكبر من ق ن د (حذره كه) فاذا كان ف م ا ق ن ب
متساويين يكون ف م س ق ن د متساويين واذا كان ف م ا اصغر من ق ن ب
يكون ف م س اصغر من ق ن د . ولكن ف م ا ف م س تعدان م ا م س مراراً
متساوية وكذلك ق ن ب ق ن د تعدان ن ب ن د مراراً متساوية ولذلك (حده
كه) م ا : ن ب :: م س : ن د

فرع . اذا فرض ا : ب :: م : د وضرب اوس في عدد ما مثل م تكون
نسبة م ا : ب :: م م : م د

القضية الخامسة . ن

اذا فرض مقداران احدهما بعد الآخر مراراً ما واخذ من كل واحد
منها مقدار احدهما بعد الآخر كما بعد الاولين الآخر فالبقية من
الواحد تعد البقية من الآخر كما بعد كل الواحد كل الآخر
(انظر كتاب الجبر ع ١٧٦)

ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من مقدارين اوب وليكن ا اكبرها فالبقية
+ ا ب تعد في م ا - م ب مراراً تماثل تعداد في م ا اي م ا - م ب = م (ا - ب)
ليكن د فضلة اوب اي ا - ب = د . اضف ب الى الجانبيين فلنا ا = د + ب .
فاذا (ق ا كه) م ا = م د + م ب . اطرح م ب من الجانبيين فلنا م ا - م ب = م د
وقد فرض د = ا - ب فاذا م ا - م ب = م (ا - ب)

القضية السادسة . ن

اذا ضرب مقدار في عدد ما وطرح من الحاصل المقدار ذاته مضروباً
في عدد اصغر من الاول فالباقي بعد ذلك المقدار مراراً تعدل الاحاد
في فضلة العددين (انظر كتاب الجبر ع ١٧٦)

لنفرض مقداراً وليتعدد م مرة ون مرة اي م ا ن ا وليكن م اكبر من ن فحيث
 ا يتعدد في م ا - ن ا مراراً تعدل الاحاد في م - ن اي م ا - ن ا = (م - ن) ا
 لنفرض ان م - ن = ق فحيث م = ن + ق . ثم م ا = ن ا + ق ا (ق ٢ كه)
 اطرح ن ا من الجانين . م ا - ن ا = ق ا اي م ا - ن ا يعد مراراً تعدل الاحاد
 في ق اي م - ن مرة اي م ا - ن ا = (م - ن) ا
 فرع . اذا كانت فضلة العددين واحداً اي م - ن = ا فحيث م ا - ن ا = ا

قضية ا . ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة . فهي متناسبة ايضاً بالقلب

مفروض ا : ب :: س : د فحيث ب ا : د :: س : د
 ليتعدد ا وس م مرة اي م ا م س . وليتعدد ب ود ن مرة اي ن ب ن د .
 فاذا كان م اصغر من ن ب يكون م س اصغر من ن د (حده كه) واذا كان
 ن ب اكبر من م ا يكون ن د اكبر من م س واذا كان ن ب = م ا ن د = م س
 واذا كان ن ب > م ا ن د > م س ولكن ن ب ن د يعنان ب ود مراراً
 متساوية وم ا م س يعنان ا وس مراراً متساوية فاذا (حده كه) ب : ا :: د : س

قضية ب . ن

في اربعة مقادير اذا تعدد الثاني في الاول او الاول في الثاني كما يتعدد
 الرابع في الثالث او الثالث في الرابع تكون نسبة الاول الى الثاني
 كنسبة الثالث الى الرابع

اولاً ليتعدد ا وب م مرة ثم م ا : ا :: م ب : ب
 ليتعدد م ا ب مراراً تعدل الاحاد في ن اي ن مرة . وليتعدد ا وب مراراً
 تعدل الاحاد في ف اي ف مرة فلنا (ق ٢ كه) ن م ا ف ا ن م ب ف ب . فاذا
 كان ن م ا اكبر من ف ا يكون ن م اكبر من ف . واذا كان ن م اكبر من ف يكون
 ن م ب اكبر من ف ب فاذا كان ن م ا اكبر من ف ا يكون ن م ب اكبر من
 ف ب واذا كان ن م ا = ف ا ن م ب = ف ب . واذا كان ن م ا > ف ا

ن م ب > ف ب وقد تعدد م ا م ب في ن م ا ن م ب مراراً متساوية. وقد تعدد
ا و ب في ف ا ف ب مراراً متساوية فإذا م ا : ا : م ب : ب (حده كه)
ثانياً ليكن س جزءاً من ا (حدا كه) وليكن د ذات ذلك الجزء من ب
فيتعدد س في ا كما يتعدد د في ب وحسباً قد تبرهن ا : س :: ب : د وبالقلب
(ق ا كه) س : ا :: د : ب

قضية ج. ن

إذا فرض أربعة مقادير متناسبة أي نسبة الأول الى الثاني كنسبة
الثالث الى الرابع وكان الأول مضروب الثاني او جزءاً منه فالثالث
ذات هذا المضروب او هذا الجزء من الرابع

مفروض ا : ب :: س : د. ولولا ليكن ا مضروب ب أي ليتعدد ب في ا مراراً
معلومة فيكون س ذات هذا المضروب من د أي د يتعدد في س كما يتعدد ب في ا
أي إذا كان ا = م ب فحينئذ س = م د

ليتعدد ا وس مرتين مثلاً أي ا ٢ س ٢ وليتعدد ب ود ٢ مرة أي ا ٢ م ٢ ب
٢ د (ق ٢ كه). فن حيث ان ا = م ب ١٢ = ٢ م ب. ومن حيث ان ا : ب ::
س : د و ١٢ = ا ٢ م ٢ ب فإذا ا ٢ س ٢ م ٢ د (حده كه) وس = م د أي د يتعدد
في س مراراً تعدل الأحاد في م أي م مرة أي كما يتعدد ب في ا

ثانياً ليكن ا جزءاً من ب فيكون س ذات هذا الجزء من د. لأن ا : ب :: س : د
وبالقلب (ق ا كه) ب : ا :: د : س. ولكن ا هو جزء من ب أي ب هو مضروب ا
وكا تقدم د هو ذات هذا المضروب من س أي س ذات الجزء من د الذي كان
من ب

القضية السابعة. ن

مقادير متساوية بينها وبين مقدار مفروض تناسب واحد. والمقدار
الواحد بينه وبين مقادير متساوية تناسب واحد. (جبر ع ١٥٨)

ليكن اوب مقدارين متساويين وس مقداراً آخر فنسبة ا: س :: ب: س
 ليكن م ا م ب مضروبين متساويين من اوب ون وس مضروباً من س .
 فلكون ا = ب م ا = م ب ا (اولية ا ك ه) فاذا كان م اكبر من ن س يكون م ب
 اكبر من ن س واذا كان م ا = ن م ب = ن س واذا كان م ا > ن س م ب
 > ن س . ولكن م ا م ب مضروبان متساويان من اوب ون س هو مضروب
 من س فاذا (حده ا ك ه) ا: س :: ب: س
 ثانياً اذا كان ا = ب فنسبة س: ا :: س: ب لانه قد يبرهن ان ا: س :: ب: س
 وبالقلب (ق ا ك ه) س: ا :: س: ب

القضية الثامنة . ن

اذا فرض مقادير غير متساوية فتناسب الاكبر الى مقدار مفروض هو
 اعظم من تناسب الاصغر الى ذلك المقدار . وتناسب ذلك المقدار
 الى الاصغر هو اعظم من تناسبه الى الاكبر (جبر ع^{١٢٣} وع^{١٢٤})

ليكن ا + ب مقداراً اكبر من مقدار آخر هو ا وليكن س مقداراً ثالثاً فتناسب
 ا + ب الى س هو اعظم من تناسب ا الى س وتناسب س الى ا هو اعظم من تناسبه
 الى ا + ب

ليكن م عدداً وليكن كل من م ا م ب اكبر من س . وليكن ن س المضروب
 الاصغر من س الذي يريد على م ا + م ب ثم ن س - س اي (ن - ا) س (ق ا
 ك ه) يكون اصغر من م ا + م ب اي م ا + م ب او م (ا + ب) هو اكبر من
 (ن - ا) س . لان ن س هو اكبر من م ا + م ب وس اصغر من م ب يكون ن س -
 س اكبر من م ا اي م ا هو اصغر من ن س - س اي من (ن - ا) س . فاذا
 المضروب ا + ب في م هو اكبر من المضروب س في ن - ا ولكن المضروب ا في م
 ليس باكبر من المضروب س في ن - ا فاذا تناسب ا + ب الى س هو اعظم من
 تناسب ا الى س (حذ ا ك ه)

ثم من حيث ان المضروب س في ن - ا هو اكبر من المضروب ا في م وليس

أكبر من المضروب $a + b$ في m فتناسب s الى a هو اعظم من تناسب a الى b (حد ٧ كه)

القضية التاسعة. ن

المقادير التي لها تناسب واحد الى مقدار مفروض هي متساوية وإذا كان لمقدار واحد تناسب واحد الى مقادير فهي متساوية (جبر ع ١٥٨)

مفروض $a : s :: b : s$ فحينئذ $a = b$

والأفليكن a أكبر من b . فيمكن وجود عدد n من m كما في القضية السابقة حتى يكون a أكبر من n s ولا يكون m b أكبر من n s . ومن حيث ان $a : s :: b : s$ فاذا كان m a أكبر من n s يكون m b أيضاً أكبر من n s (حد ٥ كه) وقد تبين ان m b ليس أكبر من n s وذلك محال فلا يكون a أكبر من b أي $a = b$

ثم لنفرض $s : a :: s : b$ فحينئذ $a = b$ لانه بالقلب (ق ١ كه) $a : s :: b : s$ ولذلك حسباً تقدم $a = b$

القضية العاشرة. ن

إذا فرض مقداران وكان بين أحدهما ومقدار ثالث تناسب اعظم من تناسب ثانيهما الى ذلك المقدار فالاول أكبرهما. وإذا كان تناسب الثالث الى أحدهما اعظم من تناسبه الى الآخر فهو اصغرهما (جبر ع ١٣٣ و ١٣٤)

إذا كان تناسب a الى s اعظم من تناسب b الى s يكون a أكبر من b لانه حسب المفروض $a : s < b : s$ فيمكن وجود عدد n من m حتى يكون m $a < n$ s و m $b > n$ s (حد ٧ كه) فيكون m $a < m$ b و $a < b$ (اولية ٤ كه)

ثم ليكن $s : b < s : a$ فيكون $b > a$. لانه قد يمكن ان يوجد عددان

م و ن حتى يكون م س < ن ب و م س > ن ا (حد ٧ كه) فمن حيث ان ن ب
اصغر من م س و ن ا اكبر من م س يكون ن ب > ن ا فيكون ب > ا

القضية الحادية عشرة . ن

التناسبات التي تعدل تناسبا واحدا هي متساوية (جبر ع ١٨٤)

مفروض ا: ب :: س: د و س: د :: ي: ف فحيث ا: ب :: ي: ف
افرض ا م س م ي مضارب متساوية من ا و س و ي وايضا ن ب ن د
ن ف مضارب متساوية من ب و د و ف. فلكون ا: ب :: س: د فاذا كان
م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ٨ كه). ولكن اذا كان م س < ن د
يكون م ي < ن ف (حد ٩ كه) لان س: د :: ي: ف فاذا كان م ا < ن ب
يكون م ي < ن ف. وهكذا اذا كان م ا = ن ب فيكون م ي = ن ف واذا كان
م ا > ن ب يكون م ي > ن ف ولكن م ا م ي هـ مضروبان متساويان من
ا و ي. و ن ب ن ف هـ مضروبان متساويان من ب و ف فاذا ا: ب :: ي: ف
(حد ١٠ كه)

القضية الثانية عشرة . ن

اذا كانت عدة مقادير متناسبة فنسبة مجموع السوابق الى مجموع التوالي
كنسبة احد السوابق الى تاليه (جبر ع ١٧٦)

مفروض ا: ب :: س: د و س: د :: ي: ف فنسبة ا: ب :: ا + س + ي: ب + د + ف

افرض ا م س م ي مضارب متساوية من ا و س و ي. وايضا ن ب ن د
ن ف مضارب متساوية من ب و د و ف. فمن حيث ان ا: ب :: س: د فاذا كان
م ا < ن ب يكون م س < ن د (حد ٩ كه) واذا كان م س < ن د يكون
م ي < ن ف لان س: د :: ي: ف. فاذا كان م ا < ن ب يكون م ا + م س
+ م ي < ن ب + ن د + ن ف وكذلك اذا كان م ا = ن ب يكون م ا + م س
+ م ي = ن ب + ن د + ن ف واذا كان م ا > ن ب يكون م ا + م س +

م > ن ب + ن د + ن ف . ولكن م + م + م + م = م (ا + س + ي)
(فرع ١ كه) وم اوم ا + م + م + م ي هاضروبان متساويان من اوم ا +
س + ي . ولهذا السبب ايضاً يكون ن ب ون ب + ن د + ن ف مضروبان
متساويين من ب ومن ب + د + ف فيكون (حذ ١ كه) ا : ب :: ا + س : ي :
ب + د + ف

القضية الثالثة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع
ولكن تناسب الثالث الى الرابع اعظم من تناسب الخامس الى
السادس فيكون تناسب الاول الى الثاني اعظم من تناسب الخامس
الى السادس (جبر ع ١٨٢)

مفروض ا : ب :: س : د ولكن س : د < ي : ف فحينئذ ا : ب < ي :
ف . لان س : د < ي : ف فيمكن وجود عدد م ون حتى يكون م س < ن د
ويكون م ي > ن ف (حذ ٧ كه) . فاذا كان م س < ن د يكون ا : ب < ن ب
لان ا : ب :: س : د فيكون م ا < ن ب وم ي > ن ف فاذا ا : ب < ي :
ف (حذ ٧ كه)

القضية الرابعة عشرة . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني مثل تناسب الثالث الى الرابع فاذا
كان الاول اكبر من الثالث يكون الثاني اكبر من الرابع واذا عدل
الاول الثالث يعدل الثاني الرابع واذا كان الاول اصغر من الثالث
يكون الثاني اصغر من الرابع (جبر ع ١٨٣)

مفروض ا : ب :: س : د فاذا كان ا < س يكون ب < د واذا كان ا =
س يكون ب = د واذا كان ا > س يكون ب > د

اولاً ليكن $a < s$ ثم $a : b < s : d$ (ق ٨ كه) ولكن $a : b :: s : d$
 فإذا $s : d < s : b$ (ق ١٢ كه) ولذلك $b < d$ (ق ١٠ كه)
 وهكذا يبرهن انه اذا كان $a = s$ فحينئذ $b = d$ واذا كان $a > s$ يكون
 $b > d$

— ١٠٠٤ —

القضية الخامسة عشرة . ن

المقادير بينها ذات التناسب الواقع بين مضاربيها المتساوية
 (جبر ع ١٧٤)

ليكن a و b مقدارين ومعدداً متناسب $a : b :: m : n$
 لأن $a : b :: a : b$ (ق ٧ كه) فيكون $a : b :: 1 : 1$ و $a : b + 1 :: 1 : 2$ (ق ١٢ كه)
 اي $a : b :: 1 : 2$ وهكذا ايضاً من حيث ان $a : b :: 1 : 2$ و $a : b + 2 :: 1 : 3$ يكون $a : b :: 1 : 3$
 و $a : b + 3 :: 1 : 4$ (ق ١٢ كه) اي $a : b :: 1 : 4$ وهكذا في كل المضارب
 المتساوية من a و b

— ١٠٠٥ —

القضية السادسة عشرة . ن

اذا كان اربعة مقادير من جنس واحد متناسبة تكون متناسبة ايضاً
 بالمبادلة (جبر ع ١٨١)

اذا كان $a : b :: s : d$ فبالمبادلة $a : s :: b : d$
 خذ m n مضروبين متساويين من a و b . ون s d مضروبين
 متساويين من s و d . ثم (ق ١٥ كه) $a : b :: m : n$ وقد فرض $a : b :: s : d$
 فإذا (ق ١١ كه) $s : d :: m : n$. ولكن $s : d :: n : s$ (ق ١٥ كه)
 فإذا $m : n :: s : d$ (ق ١١ كه) فإذا كان $m < n$ يكون $m : n < s : d$
 ن d (ق ١٤ كه) واذا كان $m = n$ يكون $m : n = s : d$ واذا كان $m > n$
 ن s يكون $m : n > s : d$ فإذا (ق ١٥ كه) $a : s :: b : d$

القضية السابعة عشرة . ن

المقادير المتناسبة بالاجال هي متناسبة ايضاً بالافراد . اي اذا كان
تناسب الاول مع الثاني الى الثاني مثل تناسب الثالث مع الرابع الى
الرابع يكون تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع
(جبر ع ١٨)

مفروض $a : b :: b : c$ و $d : e :: e : f$: ب : س : د
خذ a ن ب مضروبين من ا و ب في العددين م و ن . ولولا ليكن $a <$
ن ب . أضف الى كل واحد منهما ب فلنا $a + b < m + n$ و لكن $a +$
 $m = b + n$ (فرع ق ا ك ه) و $m + n = b + n$ (م + ن) ب (فرع ٢
ق ا ك ه) فاذا $m (a + b) < (m + n) b$
ومن حيث ان $a : b :: b : c$ و $d : e :: e : f$: ب : س : د فاذا كان $m (a + b) < (m + n) b$
ب يكون $m (s + d) < (m + n) (d + e)$ و اي $m s + m d < m d + n d + n e$ و بطرح
 $m d$ من الجانبين $m s < n d + n e$. فاذا كان $a < n$ ب يكون $m s < n d + n e$.
وهكذا يبرهن انه اذا كان $a = n$ ب يكون $m s = n d + n e$. واذا كان $a > n$ ب
يكون $m d > n d + n e$: ب : س : د (حده ك ه)

القضية الثامنة عشرة . ن

المقادير المتناسبة بالافراد هي متناسبة ايضاً بالاجال . اي اذا كان
الاول الى الثاني كالثالث الى الرابع يكون الاول مع الثاني الى الثاني
كالثالث مع الرابع الى الرابع (جبر ع ١٨)

ليكن $a : b :: b : c$ و $d : e :: e : f$: ب : س : د
لنفرض $m (a + b) < n$ ب مضروبين من $a + b$ و ب . ولولا ليكن m اعظم من
ن . فلكون $a + b$ اعظم من ب يكون $m (a + b) < n$ ب وايضاً $m (s + d) <$
ن د فاذا كان $m < n$ يكون $m (a + b) < n$ ب و $m (s + d) < n d$.

ومكلاً يبرهن أنه إذا كان $m = n$ فيكون $m (a+b)$ اعظم من n ب $m (s+d)$ اعظم من n د

ثم ليكن $m > n$ او $n < m$ فقد يمكن ان يكون $m (a+b)$ اعظم من n ب او مساوياً له او اصغر منه . أولاً ليكن $m (a+b)$ اعظم من n ب فيكون $m + a$ م ب $< n$ ب اطرح من الجانين م ب الذي هو اصغر من n ب فلنأمل $a < n$ ب - م ب اي $a < (n-m)$ ب (ق ٦ كه) . ولكن اذا كان $m + a < (n-m)$ ب يكون م س $< (n-m)$ د لان $a : b :: s : d$. و $(n-m)$ د = n د - م د (ق ٦ كه) فاقام م س $< n$ د - م د . اضف اليها م د فلنأمل م س + م د $< n$ د اي (ق ١ كه) م (س+د) $< n$ د . فاذ كان م (ا+ب) $< n$ ب يكون م (س+د) $< n$ د

ومكلاً يبرهن أنه اذا كان $m (a+b) = n$ ب يكون م (س+د) = n د واذا كان $m (a+b) > n$ ب يكون م (س+د) $> n$ د فاقام (حده كه) $a : b :: s : d$

القضية التاسعة عشرة . ن

اذا كانت نسبة مقدار كلي الى مقدار آخر كلي كمقدار مأخوذ من الاول الى مقدار مأخوذ من الثاني تكون نسبة البقية الى البقية كالكل الى الكل (جبر ع^{١٨})

اذا كان $a : b :: s : d$ وكان س اصغر من ا يكون $a - s : b - d :: a : b$ بما ان $a : b :: s : d$ فبالقلب (ق ١٦ كه) $a : s :: b : d$. وبالقسم (ق ١٧ كه) $a - s : s :: b - d : d$ وبالقلب ايضاً $a - s : b - d :: s : d$ ولكن $a : b :: s : d$ فاقام (ق ١١ كه) $a - s : b - d :: a : b$ فرع . $a - s : b - d :: s : d$

قضية د . ن .

اذا كان اربعة مقادير متناسبة فهي متناسبة ايضاً بالطرح اي الاول

الى زيادته عن الثاني كالثالث الى زيادته عن الرابع (حد ١٨ ك ٥)

مفروض ا: ب :: س: د فبالطرح ا: ب :: س: س - د

لأن ا: ب :: س: د فبالقسمة (ق ١٧ ك ٥) ا: ب :: ب: ب :: س: د - د

وبالقلب (ق ١٥ ك ٥) ب: ا - ب :: د: س - د ثم بالتركيب (ق ١٨ ك ٥)

ا: ا - ب :: س: س - د

فرع . وهكذا يبرهن ان ا: ا + ب :: س: س + د

القضية العشرون . ن

اذا فرض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة مقادير أخرى كل اثنين من
الأول مناسبان لكل اثنين من الآخر فاذا كان الأول اعظم من الثالث
يكون الرابع اعظم من السادس واذا كان مساوياً له يكون الرابع
مساوياً للسادس واذا كان اصغر منه يكون الرابع اصغر من السادس
(جبر ع ١١٣)

اذا فرض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة أخرى د ي ف وكانت نسبة

ا: ب :: د: ي وايضاً ب: س :: ي: ف فاذا كان ا < س

يكون د < ف واذا كان ا = س يكون د = ف واذا كان

ا > س يكون د > ف

اولاً ليكن ا < س ثم ا: ب < س: ب (ق ٨ ك ٥) ولكن ا: ب :: د: ي

فاذا د: ي < س: ي (ق ١٢ ك ٥) وقد فرض ب: س :: ي: ف وبالقلب

(ق ١٥ ك ٥) س: ب :: ب: ي . وقد تبرهن ان د: ي < س: ب فاذا د: ي <

ف: ي (ق ١٢ ك ٥) وبالضرورة د: ب < ف: ي (ق ١٠ ك ٥)

ثم لنفرض ا = س ثم ا: ب :: س: ب (ق ٧ ك ٥) ولكن ا: ب :: د: ي

فاذا س: ب :: د: ي ولكن س: ب :: ب: ي فاذا د: ي :: ف: ي (ق ١١

ك ٥) ود = ف (ق ٩ ك ٥) . اخيراً ليكن ا > س اي س < ا وقد تبرهن ان

س : ب :: ف : ي وب : ا :: ي : د فاذا كان س < ا يكون ف < د اي اذا كان ا > س يكون د > ف

القضية الحادية والعشرون . ن

اذا فرض ثلاثة مقادير مناسبة لثلاثة أخر بحيث يكون الاول الى الثاني كالخامس الى السادس والثاني الى الثالث كالرابع الى الخامس فان كان الاول اعظم من الثالث يكون الرابع اعظم من السادس وان كان مساوياً له فيكون الرابع مساوياً للسادس وان كان اصغر منه يكون الرابع اصغر من السادس (جبر ع ١٣)

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س وثلاثة أخر د ي ف وتناسب ا : ب :: ي : ف

وب : س :: د : ي فاذا كان ا < س يكون د < ف واذا كان ا = س يكون د = ف واذا كان ا > س يكون د > ف

اولاً ليكن ا < س ثم ا : ب < س : ب (ق ٨ ك ه) وقد فرض ا : ب ::

ي : ف فاذا ي : ف < س : ب (ق ١٢ ك ه) وب : س :: د : ي بالمفروض

وبالقلب س : ب :: ي : د فاذا ي : ف < س : ب (ق ١٢ ك ه) ود : ف < س : ب (ق ١٠ ك ه)

ثم ليكن ا = س فلنا (ق ٧ ك ه) ا : ب :: س : ب وبالمفروض ا : ب :: ي : ف

فاذا س : ب :: ي : ف (ق ١١ ك ه) وبالمفروض س : ب :: د : ي وبالقلب

س : ب :: ي : د فاذا (ق ١١ ك ه) ي : ف :: د : د = ف (ق ٩ ك ه)

اخيراً ليكن ا > س اي س < ا فقد تبين ان س : ب :: ي : د وب :

ا :: ف : ي فحسبها تقدم اذا كان س < ا فيكون ف < د اي د > ف

القضية الثانية والعشرون . ن

اذا فرضت عدة مقادير مناسبة لعدة أخرى من المقادير على ترتيبها

فيكون تناسب الاول الى الاخير من الأول كتناسب الاول من

الأخر الى الاخير (جبر ع ١٤)

مفروض ثلاثة مقادير ا ب س مناسبة لثلاثة اخرى د ي ف على ترتيبها اي

ا	ب	س	د	ي	ف
ا	ب	س	د	ي	ف
ا	ب	س	د	ي	ف
ا	ب	س	د	ي	ف

وق س ق ف من س وف . فلكون ا : ب :: د : ي فيكون م ا : ن ب :: م : د : ن ي
(ق ٤ كه) وايضا ن ب : ق س :: ن ي : ق ف فاذا (ق ٢٠ كه) حسبها كان
م ا اعظم من ق س او مساويا له او اصغر منه يكون م د اعظم من ق ف او مساويا
له او اصغر منه . ولكن م ا م د هما مضروبان متساويان من ا و د وق س ق ف
مضروبان متساويان من س وف فاذا (حده كه) ا : س :: د : ف

ثم لنفرض اربعة مقادير ا ب س د واربعة اخرى ف غ ح متناسبة على

ا	ب	س	د	ف	غ
ا	ب	س	د	ف	غ
ا	ب	س	د	ف	غ
ا	ب	س	د	ف	غ

ترتيبها اي ا : ب :: ي : ف
وب : س :: ف : غ وس : د :: غ : ح فيكون ا : د :: ي : ح
لانه حسبها تقدم في المقادير الثلاثة المتقدم ذكرها مع الثلاثة الاخر المتقدم ذكرها
ا : س :: ي : غ وبالمفروض س : د :: غ : ح فيكون ا : د :: ي : ح وهكذا
تعددت المقادير

القضية الثالثة والعشرون . ن

اذا كانت عدة مقادير مناسبة لعدة اخرى على ترتيب كالذكر في
القضية الحادية والعشرين يكون تناسب الاول الى الاخير من الاولى
كتناسب الاول من الاخرى الى اخيرها (جبر ع ١٨٦)

اولا يُفرض ثلاثة مقادير ا ب س متناسبة لثلاثة اخرى د ي ف بان

يكون ا:ب::ي:ف وب:س::د:ي فيكون ا:س::د:ف . فـ مـ ضارب

س	ب	ا
ف	ي	د
ن	م	ا
ف	ن	د

متساوية من ا:ب د ا:ي م ب م د
وكذلك من س ي ف ا:ي ن س

ن ي ن ف

فلكون ا:ب::ي:ف وا:ب::

ا:م:ب (ق ١٥ ك هـ) وي:ف::ن:ي ن ف فيكون ا:م:ب::ن:ي ن ف

(ق ١١ ك هـ) ولكون ب:س::د:ي يكون م:ب:ن:س::م:د:ن:ي (ق ٤ ك هـ)

وقد تبين ان م:ا:م:ب::ن:ي ن ف فاذا كان م:ا:م:ب::ن:ي ن ف يكون م:د <

ن ف (ق ٢١ ك هـ) واذا كان م:ا:م:ب::ن:ي ن ف فاذا كان م:ا:م:ب::ن:ي ن ف

ن س يكون م:د > ن ف . ولكن م:ا:م:ب::ن:ي ن ف ماضروبان متساويان من ا و د

ون س ن ف مضروبان متساويان من س وف فاناً (ح د ك هـ) ا:س::د:ف

ثم يُفرض اربعة مقادير مناسبة لاربعة اخرى على الترتيب السابق ا:ب:ب:

د	س	ب	ا
ح	غ	ف	ي

غ:ح وب:س::ف:غ

وس:د::ي:ف فيكون

ا:د::ي:ح . لانه حسبما تقدم ا:س::ف:ح وبالمفروض س:د::ي:ف

فحسبما تقدم ايضاً ا:د::ي:ح وهكذا تعددت المقادير

الفضية الرابعة والعشرون . ن

اذا كان تناسب الاول الى الثاني كتناسب الثالث الى الرابع وتناسب

الخامس الى الثاني كتناسب السادس الى الرابع يكون تناسب الاول

مع الخامس الى الثاني كتناسب الثالث مع السادس الى الرابع

(جبر ع ١٨٧)

مفروض ا:ب::س:د وي:ب::ف:د فيكون ا+ي:ب:س+ف:د

ف:د

لأن ي: ب :: ف: د فبالقلب ب: ي :: د: ف وبالمفروض ا: ب :: س: د
فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا: ي :: س: ف وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) ا+ ي ::
س+ ف: ف وبالمفروض ايضا ي: ب :: ف: د فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) ا+ ي:
ب :: س+ ف: د

قضية هـ . ن

اذا كان اربعة مقادير متناسبة فجميع الاولين الى فضلنها كجميع
الآخرين الى فضلنها

مفروض ا: ب :: س: د واذا كان ا < ب فيكون ا+ ب: ا- ب :: س+ د: س- د
لانه اذا كان ا < ب فن حيث ان ا: ب :: س: د فبالقسمة (ق ١٧ ك ٥)
ا- ب: ب :: س- د: د وبالقلب (ق ١ ك ٥)
ب: ا- ب :: د: س- د وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥)
ا+ ب: ب :: س+ د: د فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)
ا+ ب: ا- ب :: س+ د: س- د
وهكذا اذا كان ا > ب اوب < ا يبرهن ان
ا+ ب: ب- ا :: س+ د: د- س

قضية و . ن

التناسبات المركبة من تناسبات متساوية هي متساوية بعضها لبعض
لنفرض ان تناسب ا الى س قد تركب من تناسبين اي تناسب ا: ب وتناسب
ب: س وان تناسب د الى ف قد تركب من تناسب د: ي وتناسب ي: ف
المساويين للاولين اي ا: ب وب: س فيكون ا: س :: د: ف

ا	ب	س
د	ي	ف

اولا اذا كان تناسب ا: ب = د: ي
وتناسب ب: س = ي: ف فبالمساواة
(ق ٢٢ ك ٥) ا: س :: د: ف

ثانياً اذا كان $ا : ب = ح : د$ وب : ح = د : ح فبالساواة بالقلب (ق ٢٣ ك ١٥) $ا : ح :: د : ب$ وهكذا تعددت التناسبات

قضية ز. ن

اذا فاس مقداراً كلاً من مقدارين آخرين بقيس ايضاً مجتمعها وفضلتها لنفرض ان $س$ بقيس $ا$ اي بتعدد فيه تسع مرات مثلاً وايضاً بقيس $ب$ خمس مرات مثلاً فلنا $ا = ٩س$ وب $= ٥س$ فيكون $ا$ وب معاً ١٤ مرة $س$ اي $س$ بقيس مجتمع $ا$ وب . وفضلتها في اربعة امثال $س$ فاذا $س$ بقيس هذه الفضلة ايضاً . وهكذا مما كانت الاعتداد المفروضة . فلنفرض $ا = م$ $س$ وب $= ن$ $س$ ثم $ا + ب = (م + ن)س$ وا $- ب = (م - ن)س$ فرع . اذا كان $س$ قياساً للمقدار $ب$ وايضاً للمقدار $ا - ب$ او $ا + ب$ فانه بقيس المقدار $ا$ ايضاً لان مجتمع $ب$ وا $- ب$ هو $ا$. وفضلة $ب$ وا $+ ب$ هي $ا$ ايضاً



اصول الهندسة

الكتاب السادس

حدود

١ اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة هي ما كانت زواياها متساوية كل واحدة تعدل نظيرها . والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة

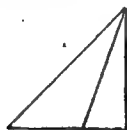


في شكلين متناسبين الاضلاع التي

تلي الزوايا المتساوية تسمى متشابهة . والزوايا تسمى الزوايا المتشابهة . وفي الدوائر الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطعان المتشابهة هي التي تقابل زوايا متساوية عند المركز

٢ اذا كانت نسبة ضلع شكل الى ضلع شكل آخر كنسبة ضلع آخر من الثاني الى آخر من الاول يقال انها متناسبة بالتكافؤ

٣ اذا انقسم خط مستقيم بحيث تكون نسبة الكل الى النصف الاطول كالنصف الاطول الى الاقصر يقال انه قد انقسم على نسبة متوسطة



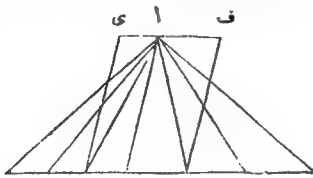
٤ علو مثلث هو البعد العمودي من رأسه الى قاعدته

علو شكل متوازي الاضلاع هو البعد العمودي بين ضلعيه المتقابلين محصورين قاعدتين وعلو شبه المربع هو البعد العمودي بين ضلعيه المتوازيين

القضية الاولى . ن

نسبة مثلثات واشكال متوازية الاضلاع على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن المثلثان ا ب س ا س د والشكلان المتوازي الاضلاع ي س س ف



على علو واحد اي عمود من ا الى ب د فنسبة المثلث ا ب س الى المثلث ا س د ونسبة الشكل ي س الى شكل س ف كنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د

اخرج ب د الى الجهتين الى ح ول حتى ينقسم ح ب الى اقسام تعدل ب س مثل ح غ غ ب واقسم دل الى اقسام تعدل س د مثل ل ك ك د وارسم ا ح ا ك ال

فلكون س ب ب غ غ ح متساوية تكون المثلثات ا ح غ غ ب ا ب س متساوية (ق ٢٨ ك ١) وكما تعددت القاعدة ب س في القاعدة ح س هكذا تعددت المثلث ا ب س في المثلث ا ح س وكذلك كما تعددت القاعدة د س في القاعدة س ل هكذا تعددت المثلث ا س د في المثلث ا س ل . واذا كانت القاعدة ح س تعدل القاعدة س ل يكون المثلثان ا ح س ا ل س متساويين (ق ٢٨ ك ١) واذا كانت القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث ا ح س اكبر من المثلث ا ل س وان كانت اصغر فاصغر . فلنا اربعة مقادير وهي القاعدتان ب س س د والمثلثان ا ب س ا س د وقد أخذ مضروبان متساويان من الاول والثالث اي القاعدة ب س والمثلث ا ب س وهما القاعدة ح س والمثلث ا ح س وهكذا من القاعدة س د والمثلث ا س د وهما القاعدة س ل والمثلث ا ل س وقد تبرهن انه اذا كانت القاعدة ح س اكبر من س ل يكون المثلث ا ح س اكبر من ا ل س وان كانت متساوية لما فالمثلث ا ح س يعدل المثلث ا ل س وان كانت اصغر فاصغر منه فنسبة القاعدة ب س الى القاعدة س د كنسبة المثلث ا ب س الى المثلث ا س د (حده ك ٥)

ثم لكون الشكل المتوازي الاضلاع س ي هو مضاعف المثلث ا ب س
(ق ٤١ ك ١) والشكل س ف مضاعف المثلث ا س د وبين المقادير ذات النسبة
الكائنة بين مضاربيها المتساوية (ق ١٥ ك ٥) يكون الشكل س ي الى الشكل
س ف كالمثلث ا ب س الى المثلث ا س د . وقد تبين ان ب س : س د ::
ا ب س : ا س د فبالمساواة الشكل س ي الى الشكل س ف كلقاعدة ب س الى
القاعدة س د (ق ١١ ك ٥)

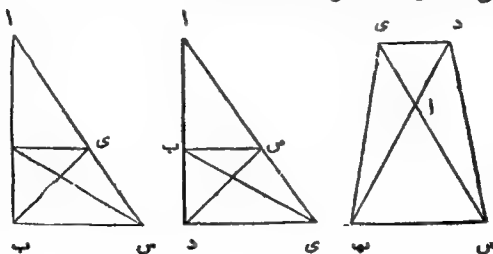
فرع . نسبة المثلثات الى الاشكال المتوازية الاضلاع في كسبة قواعدها
بعضها الى بعض اذا كانت المثلثات والاشكال على علو واحد

الفضية الثانية . ن

اذا رُسم خطٌ مستقيم حتى يوازي ضلع مثلث فانه يقطع الضلعين
الآخرين او الخططين الحاصلين من اخراجها حتى تكون اقسامها
متناسبة . واذا قُطع الضلعان او الخططان الحاصلان من اخراجها حتى
تكون اقسامها متناسبة فالخط المستقيم الذي يقطعها يوازي الضلع
الآخر من المثلث

ليكن ا ب س مثلثاً وليرسم د ي حتى يوازي ب س فتكون نسبة ب د : د ا ::
س ي : ي ا

ارسم ب ي س د . فالمثلث ب د ي يعدل المثلث س د ي (ق ٢٧ ك ١)
لانها على قاعدة واحدة د ي وبين خطين متوازيين ب س د ي . وادى مثلث



آخر والمقادير المتساوية لما نسبة واحدة الى مقدار آخر (ق ٧ كه) اي المثلث
ب د ي الى المثلث ا د ي كالمثلث س د ي الى المثلث ا د ي ولكن ب د ي :
ا د ي :: ب د : د ا (ق ١ كه) لان لما علواً واحداً اي عودنا من ي الى ب ا ولما
السبب ايضاً من د ي : ا د ي :: س ي : ي ا فاذاً ب د : د ا :: س ي : ي ا . ثم
لفرض ان الضلعين ا ب ا س او المخططين الحاصلين من اخراجها قد قُطعا في
د و ي حتى تكون نسبة ب د : د ا :: س ي : ي ا فالخط المستقيم د ي الموصل بين
نقطتي القطع يوازي ب س . ثم الشكل كما تقدم . فلكون ب د : د ا :: س ي : ي ا
ولكون ب د : د ا :: ب د ي : ا د ي (ق ١ كه) وس ي : ي ا :: س د ي : ا د ي
يكون المثلث ب د ي : ا د ي :: س د ي : ا د ي اي المثلثان ب د ي وس د ي
لما نسبة واحدة الى مثلث آخر ا د ي فالمثلث ب د ي = س د ي (ق ١ كه)
وما على قاعدة واحدة د ي والمثلثات المتساوية اذا كانت على قاعدة واحدة هي بين
خطين متوازيين (ق ٢٩ كه ١) فالخط د ي يوازي الخط ب س

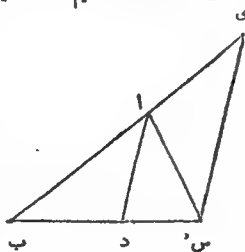
القضية الثالثة . ن

اذا تنصفت زاوية مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة ايضاً فقسما
القاعدة بينهما النسبة الكائنة بين الضلعين الآخرين من المثلث . واذا
كانت نسبة قسيمي القاعدة بعضها الى بعض كنسبة الضلعين الآخرين
من المثلث بعضها الى بعض فالخط المستقيم المرسوم من نقطة القطع

الى الزاوية المقابلة ينصف تلك الزاوية

ليكن ا ب س مثلثاً وتنصف الزاوية ب ا س منه بالخط المستقيم ا د الذي
يقطع القاعدة في د فنسبة ب د : د س ::

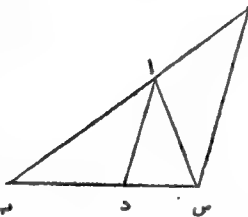
ب ا : ا س



من النقطة س ا رسم س ي حتى يوازي
د ا وليلاق ب ا بعد اخراجه في ي فلان
الخط المستقيم ا س يلاقي المخططين المتوازيين
ا د ي س فالزاوية ا س ي تعدل المتبادلة

س ا د (ق ٢٩ ك ١) وس ا د حسب المفروض تعدل ب ا د فالزاوية ب ا د تعدل
 ا س ي . ولأن الخط المستقيم ب ا ي يلاقي المتوازيين ا د ي س فالزاوية الخارجة
 ب ا د تعدل الداخلة المقابلة ا ي س . ولكن ب ا د تعدل ا س ي فالزاوية ا س ي
 تعدل ا ي س فالضلع ا ي يعدل الضلع س ا (ق ٦ ك ١) ولكون ا د قد رُسم حتى
 يوازي ي س احد اضلاع المثلث ب ي س فنسبة ب د : د س :: ب ا : ا ي (ق ٢
 ك ٦) و ا ي = ا س فاذا ب د : د س :: ب ا : ا س (ق ٧ ك ٥)

ثم لنفرض ب د : د س :: ب ا : ا س . ارم ا د فالزاوية ب ا س قد تنصفت
 بالخط المستقيم ا د



ثم الشكل كما تقدم . فلكون
 ب د : د س :: ب ا : ا س وب د :
 د س :: ب ا : ا ي (ق ٢ ك ٦) لأن
 ا د يوازي ي س فنسبة ا ب : ا س ::
 ا ب : ا ي (ق ١١ ك ٥) فاذا س
 ا ي (ق ٩ ك ٥) والزاوية ا ي س =

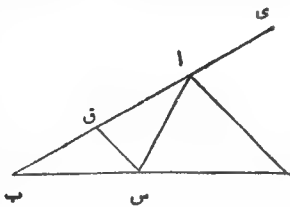
ا س ي (ق ٥ ك ١) و ا ي س تعدل الخارجة المقابلة ب ا د و ا س ي تعدل المتبادلة
 س ا د (ق ٢٩ ك ١) فالزاوية ب ا د = س ا د فقد تنصفت الزاوية ب ا س بالخط
 المستقيم ا د

قضية ألف . ن

اذا تنصفت الزاوية الخارجة من مثلث بخطٍ مستقيم يقطع القاعدة
 بعد اخراجها فنسبة القسمين بين الخط القاطع وطرفي القاعدة
 بعضها الى بعض كنسبة الضلعين الآخرين من المثلث بعضها الى
 بعض . واذا كانت نسبة قسمي القاعدة بعد اخراجها بعضها الى بعض
 كنسبة الضلعين الآخرين من المثلث بعضها الى بعض فالخط

الموصل بين نقطة القطع والزاوية المقابلة بنصف الزاوية الخارجة من
المثلث

ليكن $اب س$ مثلثاً ولننصف زاوية الخارجة بالخط المستقيم $ا د$ الذي يلاقي
القاعدة بعد اخراجها في د فنسبة $ب د :$
 $د س :: ب ا : ا س$



من النقطة $س$ ارسم $س ق$ حتى
يوازي $ا د$ (ق ٢١ ك ١) فلكون الخط
المستقيم $ا س$ يلاقي المتوازيين $ا د$ و $س ق$

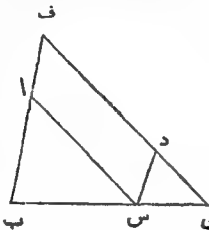
فالزاوية $ا س ق$ تعدل المتبادلة $س ا د$ (ق ٢٩ ك ١) و $س ا د$ تعدل $د ا ي$ حسب
المفروض فالزاوية $د ا ي$ تعدل $ا س ق$ ولكون الخط المستقيم $ق ا ي$ يلاقي المتوازيين
 $س ق$ و $ا د$ فالزاوية الخارجة $د ا ي$ تعدل الداخلة المتقابلة $س ق ا$ وقد تبين ان
 $ا س ق$ تعدل $د ا ي$ فالزاوية $ا س ق$ تعدل الزاوية $س ق ا$ والضلع $س ا$ يعدل
الضلع $ا ق$ (ق ٦ ك ١) ولكن $ا د$ يوازي $س ق$ ضلعاً من المثلث $ب س ق$ فنسبة
 $ب د$ الى $د س$ كنسبة $ب ا$ الى $ا ق$ (ق ٢٢ ك ٦) و $ا ق$ يعدل $ا س$ فنسبة $ب د : د س ::$
 $ب ا : ا س$

ثم لنفرض $ب د : د س :: ب ا : ا س$ ارسم $ا د$ فالزاوية $س ا د$ تعدل الزاوية
 $د ا ي$ ثم الشكل كما تقدم فلكون $ب د : د س :: ب ا : ا س$ و $ب د : د س :: ب ا :$
 $ا ق$ (ق ٢٢ ك ٦) فنسبة $ب ا : ا س :: ب ا : ا ق$ (ق ١ ك ٥) و $ا س$ يعدل $ا ق$ (ق ٩
ك ٥) والزاوية $ا ق س$ تعدل الزاوية $ا س ق$ (ق ٥ ك ١) والزاوية $ا ق س$ تعدل
الخارجة $ي ا د$ و $ا س ق$ تعدل المتبادلة $س ا د$ فالزاوية $ي ا د = س ا د$

القضية الرابعة . ن

في مثلثات متساوية الزوايا الاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية هي
متناسبة والاضلاع المقابلة الزوايا المتساوية هي متشابهة اي هي
سواء نسب وتواليها

ليكن $ا ب س د$ $س$ $د$ $س$ $ي$ مثلثين متشابهين اي متساويي الزوايا اي الزاوية
 $ا ب س$ تعدل $د س ي$ والزاوية $ا س ب$ تعدل $د ي س$ وبالنسبة (فرع ق ٢٢
 ك ١) الزاوية $ب ا س$ تعدل $س د ي$ فالاضلاع
 التي تلي هذه الزوايا المتساوية هي متناسبة والاضلاع
 التي تقابلها هي متشابهة



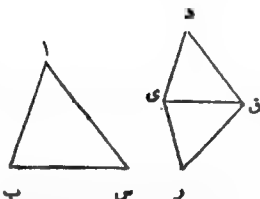
ليوضع المثلثان حتى يمس احدهما الآخر ويكون
 الضلع $ب س$ من الواحد و $ي س$ من الآخر على
 استقامة واحدة فالزاويتان $ا ب س$ $ا س ب$ معاً
 اقل من قائمتين (ق ١٧ ك ١) و $د ي س = ا س ب$ فالزاويتان $ا ب س$ $د ي س$
 معاً اقل من قائمتين فاذا اُخرج $ب ا و ي د$ يلتقيان (فرع اول ق ٢٩ ك ١) فلنخرج
 حتى يلتقيا في $ف$. فلنكون الزاوية $ا ب س$ تعدل $د س ي$ فالخط $ب ف$ يوازي
 $س د$ (ق ٢٨ ك ١) ولكون $ا س ب$ تعدل $د ي س$ فالخط $ا س$ يوازي $ف ي$
 (ق ٢٨ ك ١) فالشكل $ا س د$ متوازي الاضلاع واف يعدل $س د ا س$
 يعدل $ف د$ (ق ٢٤ ك ١) ولكون $ا س$ يوازي $ف ي$ احد اضلاع المثلث $ف ب ي$
 فنسبة $ب ا : ف ي :: ب س : س ي$ (ق ٢ ك ٦) واف $= س د$ فاذا $ب ا : س د :: ب س : س ي$
 (ق ٦ ك ٥) وبالمبادلة $ب ا : ب س :: س د : س ي$ (ق ٦ ك ٥)
 ولان $س د$ يوازي $ب ف$ فنسبة $ب س : س ي :: ب ف : ف د$ (ق ٢ ك ٦)
 ولكن $ف د = ا س$ فنسبة $ب س : س ي :: ا س : د ي$ وبالمبادلة $ب س : ا س :: د ي : س ي$
 $س ي : د ي :: د ي : س ي$ وقد تبين ان $ا ب : ب س :: س ي : و ب س : س ا :: س ي : د ي$
 $س ي : د ي :: د ي : س ي$ فبالمساواة $ب ا : ا س :: س د : د ي$

التضية الخامسة بن

اذا كانت الاضلاع المحيطة بزوايا مثلثين متناسبة فالمثلثان متشابهان
 وزواياهما المتساوية تقابل اضلاعها المتناسبة

ليكن $ا ب س د ي ق$ مثلثين اضلاعها متناسبة اي $ا ب : ب س :: د ي : ي ق$

وبس : س : ا : د : ق : د وبالمساواة ب : ا : س : د : د : ق : فالثلث
 ا ب س يشبه المثلث د ي ق اي زواياها متساوية والزوايا المتساوية تقابل الاضلاع
 المتناسبة اي الزاوية ا ب س تعدل د ي ق وبس ا تعدل ي ق د وبس
 تعدل ي د ق



في النقطتين ي وق من الخط المستقيم
 ي ق اجعل الزاوية ق ي ر تعدل
 ا ب س (ق ٢٢ ك ١) والزاوية ي ق ر
 تعدل ا س ب فالباقية ب ا س تعدل
 الباقية ي ر ق (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) وزوايا

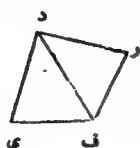
الثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث ي ر ق والاضلاع التي تقابل الزوايا المتساوية
 هي متناسبة (ق ٤ ك ٦) اي

ا ب : ب س : د ي : ي ق ولكن بالمفروض
 ا ب : ب س : د ي : ي ق

د ي : ي ق : د ي : ي ق اي (ق ١١ ك ٥) د ي وري
 بينها وبين ي ق تناسب واحد فها متساويان (ق ٩ ك ٥) ولهذا السبب ايضا د ي
 يعدل ق ر . ثم في المثلثين د ي ق ر ي ق الضلع د ي = ي ر و ي ق مشترك
 بينها والقاعدة د ق يعدل القاعدة ق ر فالزاوية د ي ق تعدل ر ي ق (ق ٨ ك ١)
 وبقيت زوايا الواحد تعدل بقيت زوايا الاخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية
 (ق ٤ ك ١) فالزاوية د ي ق = ر ي ق و ي د ي ق = ي ر ق ولكن ر ي ق = ا ب س
 فانما ا ب س = د ي ق ولهذا السبب ايضا ا ب س = د ي ق والزاوية عند ا
 تعدل الزاوية عند د فزوايا المثلث ا ب س تعدل زوايا المثلث د ي ق

القضية السادسة . ن

في مثلثين اذا عدلت زاوية من الواحد زاوية من الآخر وكانت
 الاضلاع المحيطة بهما متناسبة فالمثلثان متشابهان والزوايا التي تقابل
 الاضلاع المتناسبة متساوية



ليكن ا ب س د ي ف مثلثين
ولكن الزاويتان ب ا س ي د ف
متساويتين والاضلاع المحيطة بهما
متناسبة اي ب ا : س ي : د ف
فالمثلثان متشابهان والزاوية ا ب س
تعدل د ي ف واس ب تعدل د ف ي

في النقطتين د وف من الخط المستقيم د ف اجعل الزاوية ف د ر تعدل
احدى الزاويتين ب ا س ا و ي د ف (ق ٢٢ ك ١) واجعل الزاوية د ف ر تعدل
اس ب فالباقيـة ا ب س تعدل الباقيـة د ر ف (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) والمثلث ا ب س
يشبه المثلث د ر ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

ب ا : س ي : د ف وبالمفروض

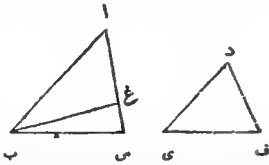
ب ا : س ي : د ف فانما (ق ١١ ك ٥)

ي د : د ف : د ر : د ف اي ي د = د ر (ق ٩ ك ٥)

ود ف مشترك بين المثلثين ي د ف د ر ف فالضلعان ي د د ف يعدلان الضلعين
د ر د ف . ولكن الزاوية ي د ف = د ر ف فالقاعدة ي د ف تعدل القاعدة د ر ف
(ق ٤ ك ١) والمثلث ي د ف يعدل المثلث د ر ف وبقيـة الزوايا من الواحد تعدل
بقية الزوايا من الآخر اي التي تقابلها الاضلاع المتساوية . فالزاوية د ف ر تعدل
د ف ي ود ر ف تعدل د ي ف . ولكن الزاوية د ف ر تعدل اس ب فالزاوية
اس ب تعدل د ف ي وبالمفروض ب ا س = ي د ف فالآخرى ا ب س تعدل
الآخرى د ي ف فالمثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف

القضية السابعة . ن

في مثلثين اذا عدلت زاويةً من الواحد زاويةً من الآخر والاضلاع
المحيطة بزاويتيـن أُخريـن متناسبة فاذا كانت كل واحدة من بقية
الزوايا اصغر من قائمة اولم تكن اصغر من قائمة فالمثلثان متشابهان
والزوايا التي تليها الاضلاع متناسبة متساوية



ليكن اب س دى ف مثلين
والزاوية باس فلتعدل بى د ف
وليكن الاضلاع المحيطة بزاويتي
اخرين اب س دى ف متناسبة

اي اب : ب س :: دى : عى ف ولولا لتكن كل واحدة من الزاويتين الباقيتين عند
س وف اصغر من قائمة فالمثلث اب س يشبه المثلث دى ف اي الزاوية
اب س = دى ف والزاوية الباقية عند س تعدل الباقية عند ف

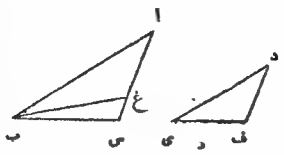
لانه ان لم تكن الزاويتان اب س دى ف متساويتين فاحدهما اكبر من
ال اخرى لتكن اب س اكبرها وعند النقطة ب في الخط المستقيم اب اجعل الزاوية
اب غ تعدل دى ف (ق ٢٢ ك) فحسب المفروض الزاوية با غ تعدل عى د ف
وقد جعلت اب غ = دى ف فالباقية اب غ تعدل الباقية دى ف (فرع ٤
ق ٢٢ ك) وزوايا المثلث اب غ تعدل زوايا المثلث دى ف فلنا (ق ٤ ك ٦)

اب : ب غ :: دى : عى ف وبالمفروض

دى : عى ف :: اب : ب س فأذا (ق ١١ ك ٥)

اب : ب س :: اب : ب غ اي بين اب والخطين ب س ب غ
تناسب واحد فأذا ب س = ب غ (ق ٩ ك ٥) فالزاوية ب غ س = ب س غ
(ق ٥ ك ١) ولكن بالمفروض ب س غ اصغر من قائمة فتكون ب غ س اصغر من
قائمة فتكون الزاوية المتوالية اب غ اعظم من قائمة (ق ١٢ ك ١) وقد تبين ان
اب غ = دى ف فتكون دى ف اعظم من قائمة وقد فرض انما اصغر من قائمة
وذاك محال. فلا تكون الزاويتان اب س دى ف غير متساويتين اي هـا
متساويتان. والزاوية عند ا تعدل الزاوية عند د فالباقية عند س تعدل الباقية
عند ف فالمثلث اب س يشبه المثلث دى ف

ثم ان لم تكن كل واحدة من الزاويتين عند س وف اصغر من قائمة فالمثلث



اب س يشبه المثلث دى ف. لانه اذا
رُسم الشكل كما تقدم يُبرهن ان ب س
= ب غ وب س غ = ب غ س.
وب س غ ليست اصغر من قائمة فلا

تكون ب غ س اصغر من قائمة وزاويتان من المثلث ب غ س معاً لا تكونان اصغر من قائمتين وذلك غير ممكن (ق ١٧ ك ١) فيبرهن ان المثلث ا ب س يشبه المثلث د ي ف حسباً تقدم

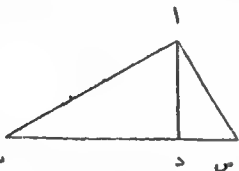
— ١٥٨ —

القضية الثامنة . ن

في مثلث ذي قائمة اذا رُسِمَ خطٌ عموديٌّ من القائمة الى القاعدة فالمثلثان الحادّان على جانبي العمود متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث

الاول

ليكن ا ب س مثلثاً ذا قائمة ب ا س ومن النقطة ا ليُرسم ا د عموداً على القاعدة ب س فالمثلثان ا ب د ا س د متشابهان ويشبهان ايضاً المثلث ا ب س . لان الزاوية ب ا س تعدل الزاوية ا ب د لكون كل واحدة منها قائمة والزاوية عند ب مشتركة



بين المثلثين ا ب س ا ب د فالزاوية الاخرى ا س ب تعدل الاخرى ب ا د (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فالمثلثان ا ب س ا ب د متساويان الزوايا والاضلاع التي تلي الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ ك ٦) فالمثلثان متشابهان (حد ١ ك ٦) وهكذا يبرهن ان المثلث ا د س يشبه المثلث ا ب س فالمثلثان ا د س ا ب د يشبهان المثلث ا ب س فهما متشابهان

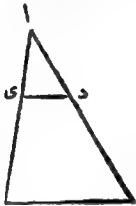
فرع ٦. يتضح من هذه القضية ان العمود على القاعدة من قائمة مثلث ذي قائمة هو متناسب متوسط بين قسَمَي القاعدة وان كل ضلع هو متناسب متوسط بين القاعدة والقطعة من القاعدة التي تلي ذلك الضلع . لان في المثلثين ب د ا ا د س لنا (ق ٤ ك ٦)

ب د : د ا :: د ا : د س	وفي المثلثين ا ب س ب د ا لنا (ق ٤ ك ٦)
ب س : ب ا :: ب ا : ب د	وفي المثلثين ا ب س ا س د (ق ٤ ك ٦)
ب س : س ا :: س ا : س د	

القضية التاسعة. ع

علينا ان نقطع من خطٍ مستقيم جزءاً معيناً اي جزءاً بعدهُ الخطُ مراراً
مفروضة

لكن اب الخط المستقيم المفروض. فعلياً ان نقطع منه جزءاً بعدهُ اب مراراً
مفروضة



من النقطة ا ارم الخط المستقيم اس حتى يجعل مع
اب زاوية وفي اس افرض نقطة مثل د حتى ان اس
بعدها د مراراً تعدل المارر المفروضة للخط اب ان بعد
الجزء المطلوب قطعة. ارم ب س ثم ارم د ي حتى
يوازي ب س

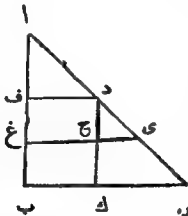
فلان ي د يوازي ب س احد اضلاع المثلث فبنسبة س د : دا :: ب ي : ي ا
(ق ٢ ك ٦) وبالتركيب (ق ١٨ ك ٥) س ا : اد :: ب ا : ا ي. ولكن س ا هو مضروب
من ا د فيكون ب ا ذات هذا المضروب من ا ي (ق ج ك ٥) اي بعداى كما ان
اس بعدا د فاي جزء كان ا د من اس يكون اى ذات ذلك الجزء من اب فقد
قطع من اب الجزء المفروض

القضية العاشرة. ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً مفروضاً الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين

اقسام خط مستقيم مفروض

ليكن اب الخط المستقيم المفروض واس الخط المقسوم. علياً ان نقسم اب
الى اقسام بينها النسبة الكائنة بين اقسام الخط اس

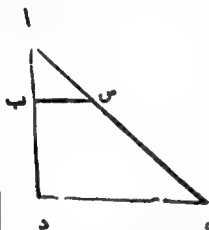


ليقسم اس في د ي وليوضع اب اس حتى
تحدث بينهما زاوية وارم ب س. ثم من النقطتين د
و ي ارم د ف ي غ حتى يوازي ب س (ق ٢١ ك ١)
ومن د ارم د ح ك حتى يوازي اب. فكل واحد من
الشكلين د غ ح ب متوازي الاضلاع ود ح ح ف غ

(ق ٢٤ ك ١) وح ك = غ ب . ولكون ح ي يوازي ك ج احد اضلاع المثلث د ك س
فنسبة س ي : ي د :: ك ح : ح د (ق ٢ ك ٦) ولكن ك ح = ب غ وح د = غ ف
فكون س ي : ي د :: ب غ : غ ف . ولكون ف د يوازي غ ي احد اضلاع المثلث
اغ ي فنسبة ي د : د ا :: غ ف : ف ا وقد تبين ان س ي : ي د :: ب غ : غ ف
فقد انقسم الخط المستقيم ا ب مثل انقسام الخط ا س

القضية الحادية عشرة . ع

علينا ان نجد خطاً ثالثاً مناسباً لخطين مستقيمين مفروضين
ليكن ا ب ا س الخطين المستقيمين المفروضين فليوضعا حتى نحدث بينهما زاوية
علينا ان نجد خطاً ثالثاً يناسبها

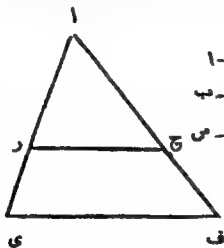


اخرج ا ب ا س الى د وى واجعل ب د
يعدل ا س . ارم ب س ثم من النقطة د ارم دى
حتى يوازي ب س . فلان ب س يوازي دى
ضلعاً من المثلث ا دى فنسبة ا ب : ب د :: ا س :
س ي (ق ٢ ك ٦) ولكن ب د = ا س فنسبة ا ب : ي

ا س :: ا س : س ي فالخط س ي انما هو مناسب ثالث للخطين المفروضين

القضية الثانية عشرة . ع

علينا ان نجد مناسباً رابعاً لثلاثة خطوط مستقيمة مفروضة
ليكن ا ب و س الخطوط الثلاثة المستقيمة المفروضة . علينا ان نجد خطاً رابعاً
يناسبها



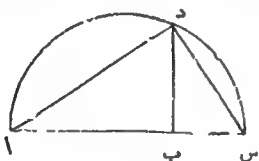
ا —————
ب —————
س —————

لفرض خطين
مستقيمين دى د ف
بينها زاوية دى د ف .
ومنها افصل د ر حتى
يعدل ا و رى حتى .

يعدل ب و د ح حتى يعدل س . ارم رح ثم ارم ي ف حتى يوازي رح (ق ٢١ ك ١). فلأن رح يوازي ي ف احد اضلاع المثلث د ي ف فنسبة در : ر ي = د ح : ح ف (ق ٢ ك ٦) ولكن در = اوري = ب و د ح = س فنسبة ا : ب = س : ح ف . فالخط ح ف انما هو مناسب رابع للخطوط الثلاثة المفروضة

القضية الثالثة عشرة . ع

علينا ان نجد متناسباً متوسطاً بين خطين مستقيمين مفروضين
ليكن ا ب ب س الخطين المستقيمين المفروضين . علينا ان نجد متناسباً



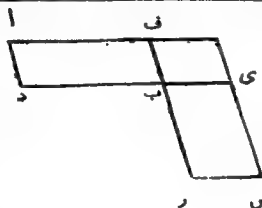
متوسطاً بينها . اجعل ا ب ب س على استقامة واحدة وعلى اس ارم نصف دائرة ا د س . ومن النقطة ب ارم ب د عموداً على اس (ق ١ ك ١) ثم ارم ا د و د س

لان ا د س قائمة لكونها في نصف دائرة (ق ٢١ ك ٢) وقد رُم د ب عموداً من القائمة على القاعدة فالخط د ب انما هو متناسب متوسط بين قسبي القاعدة (فرع ق ٨ ك ٦) فقد وجدنا د ب متناسباً متوسطاً بين الخطين المفروضين ا ب ب س

القضية الرابعة عشرة . ن

في شكلين متوازيي الاضلاع متساويين اذا عدلت زاوية من الواحد زاوية من الآخر تكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ . واذا عدلت زاوية من شكل متوازي الاضلاع زاوية من آخر متوازي الاضلاع وكانت الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ فالشكلان متساويان

ليكن ا ب ب س شكلين متوازيي الاضلاع متساويين لما الزاويتان عند ب



متساويان وليكن الضلعان د ب ب ي
على استقامة واحدة فيكون الضلعان رب
ب ف ايضاً على استقامة واحدة (ق ١٤ ك)
فاضلاع الشكليين ا ب ب س
المحيطة بالزاويتين المتساويتين في متناسبة
بالتكافؤ اي نعمة د ب : ب ي :: رب : ب ف

ثم الشكل ف ي . فلان الشكليين ا ب ب س متساويان وفي شكل
اخر متوازي الاضلاع فلنا ا ب : ف ي :: ب س : ف ي (ق ٧ ك ه)
والشكلاين ا ب ف ي لما علو واحد فلنا

ا ب : ف ي :: د ب : ب ي (ق ١٣ ك) وايضاً

ب س : ف ي :: رب : ب ف (ق ١٣ ك) فاذا

د ب : ب ي :: رب : ب ف (ق ١١ ك ه) فاضلاع

الشكليين ا ب ب س المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع متناسبة بالتكافؤ اي د ب : ب ي :: رب : ب ف

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب س لان د ب : ب ي :: رب : ب ف وايضاً

د ب : ب ي :: ا ب : ف ي وايضاً رب : ب ف :: ب س : ف ي فاذا

ا ب : ف ي :: ب س : ف ي (ق ١١ ك ه)

فالشكل ا ب يعدل الشكل ب س (ق ٩ ك ه)

القضية الخامسة عشرة . ن

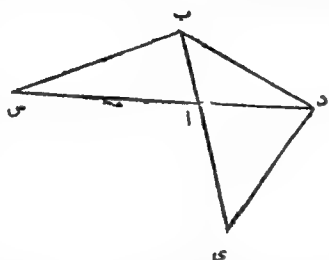
في مثلثين متساويين لهما زاوية من الواحد تعدل زاوية من الآخر تكون

الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ واذا عدلت

زاوية من الواحد زاوية من الآخر وكانت الاضلاع المحيطة بهاتين

الزاويتين متناسبة بالتكافؤ فالمثلثان متساويان

ليكن ا ب س ا د ي مثلثين متساويين والزاوية ب د ا س فلنعدل الزاوية



د اى فالاضلاع المحيطة بهاتين
الزاويتين المتساويتين متناسبة
بالتكافؤ اى $س : ا : د :: ي : ا$
اب :

ليوضع المثلثان حتى يكون
الضلعان $س ا$ و $د ا$ على استقامة

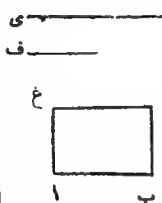
واحدة فيكون $ي ا$ اب ايضاً على استقامة واحدة (ق ٤ ك ١) ارم $ب د$. فلكون
المثلث $اب س$ يعدل المثلث $اد ي$ فنسبة المثلث $س اب$ الى المثلث $ب اد$
كالمثلث $ي اد$ الى $ب اد$ ولكن $س اب : ب اد :: س ا : د$ ونسبة $ي اد :$
 $ب اد :: ي ا : اب$ فاذاً $س ا : د :: ي ا : اب$ (ق ١١ ك ٥) فالاضلاع المحيطة
بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ

ثم لنفرض ان هذه الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة بالتكافؤ
فالمثلث $اب س$ يعدل المثلث $اد ي$. ارم $ب د$ كما تقدم . فلان $س ا : د :: ي ا :$
 $اب$ وايضاً لان $س ا : د :: المثلث اب س : المثلث ب اد$ (ق ١١ ك ٥) وايضاً
 $ي ا : اب :: المثلث ي اد : المثلث ب اد$. فالمثلث $اب س : المثلث ب اد ::$
المثلث $ي اد : المثلث ب اد$ (ق ١١ ك ٥) فالمثلث $اب س$ يعدل المثلث $ي اد$
(ق ٩ ك ٥)

القضية السادسة عشرة . ن

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا الذي هو
مسطح الطرفين يعدل القائم الزوايا الذي هو مسطح الوسطين .
والقائم الزوايا الذي هو مسطح الطرفين اذا عدل القائم الزوايا الذي
هو مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة

ليكن $اب س د$ ي ف خطوطاً مستقيمة متناسبة اى $اب : س : د :: ي : ف$
فالقائم الزوايا $اب في$ يعدل القائم الزوايا $س د في$ ن



من النقطة ا ارم اغ عموداً على اب
ومن س ارم س ح عموداً على س د واجعل
اغ يعدل ف وس ح يعدل ي وتم
الشكلين المتوازي الاضلاع غ ب ح د .
فلكون اب : س د :: ي : ف و ي = س ح

وف = اغ فنسبة اب : س د :: س ح : اغ (ق ٧ لكه) فاضلاع الشكلين
المحيطة بالزوايا المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ فالشكل ح د يعدل الشكل غ ب
(ق ٤ لكه) وب غ هو مسطح اب في ف لان اغ = ف وح د مسطح س د في ي لان
س ح = ي فالقائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي. ثم اذا فرض
ان القائم الزوايا اب في ف يعدل القائم الزوايا س د في ي فالخطوط الاربعة
متناسبة اي اب : س د :: ي : ف. ثم الشكلين كما تقدم. فلان القائم الزوايا اب
X ف = القائم الزوايا س د X ي والقائم الزوايا ب غ هو مسطح اب X ف لان اغ
= ف والقائم الزوايا ح د هو مسطح س د X ي لان س ح = ي فالقائم الزوايا
ب غ يعدل القائم الزوايا د ح وزواياها متساوية ايضاً فاضلاع المحيطة بالزوايا
المتساوية هي متناسبة بالتكافؤ (ق ٤ لكه) فنسبة اب : س د :: س ح : اغ وس ح
= ي واغ = ف فنسبة اب : س د :: ي : ف

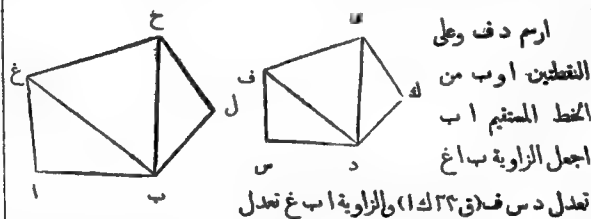
القضية السابعة عشرة. ن

اذا كانت ثلاثة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا الذي هو
مسطح الطرفين يعدل مربع الوسط. والقائم الزوايا الذي هو مسطح
الطرفين اذا عدل مربع الوسط فالخطوط الثلاثة متناسبة
ليكن ا وب وس ثلاثة خطوط متناسبة اي ا : ب :: ب : س فالقائم الزوايا
ا X س يعدل مربع ب. افرض خطاً آخر يعدل ب
مثل د فلكون ا : ب :: ب : س وقد فرض ان ب
يعدل د فنسبة ا : ب :: د : س (ق ٧ لكه) واذا
كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالقائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم

الزوايا مسطح الوسطين (ق ١٦ ك ٦) فالقائم الزوايا X س يعدل القائم الزوايا ب
 X د والقائم الزوايا ب X د يعدل مربع ب لأن د يعدل ب فالقائم الزوايا X س
 $=$ ب. ثم اذا فرض ان X س $=$ ب تكون نوبة ا ب $==$ ب : س
 لفرض كما تقدم ان د يعدل ب فلأن القائم الزوايا X س $=$ ب و د $=$ ب
 فالقائم الزوايا X س $=$ ب X د واذا كان القائم الزوايا مسطح الطرفين يعدل القائم
 الزوايا مسطح الوسطين فالخطوط الاربعة متناسبة (ق ١٦ ك ٦) اي ا ب $==$ د : س
 ولكن ب $=$ د فتكون ا ب $==$ ب : س

القضية الثامنة عشرة . ع

علينا ان نرسم على خط مستقيم مفروض شكلاً ذا اضلاع مستقيمة
 شبيهاً بشكل مفروض ذي اضلاع مستقيمة ومثله في الوضع
 ليكن ا ب الخط المستقيم المفروض و س د ي ف الشكل المفروض ذا اضلاع
 مستقيمة . علينا ان نرسم على ا ب مثل س د ي ف شكلاً ووضعاً



س د ف فالزاوية الاخرى س ف د تعدل ا غ ب (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) فالمثلث
 ف س د يشبه المثلث غ ا ب . ثم عند التقاطعين ب و غ من الخط المستقيم ب غ
 اجعل الزاوية ب غ ح تعدل د ف ي (ق ٢٢ ك ١) والزاوية غ ب ح تعدل
 ف د ي فالزاوية الاخرى ف ي د تعدل الاخرى غ ح ب والمثلث ف د ي يشبه
 المثلث غ ب ح . فلأن الزاوية ا غ ب تعدل س ف د والزاوية ب غ ح تعدل
 ف ي فكل الزاوية ا غ ح يعدل الكل س ف ي . وهكذا يبرهن ايضاً ان ا ب ح تعدل
 س د ي . ولكن الزاوية عند ا تعدل الزاوية عند س والزاوية غ ح ب تعدل ف ي
 د فالمثلث ا ب ح غ يذهب الشكل س د ي ف . واضلاع الشكلين المحيط بالزوايا

المساوية متناسبة. لأن المثلثين غ ا ب ف س د متساويي الزوايا فنسبة ب ا : غ : د س : س ف (ق ٤ ك ٦) وهكذا أيضاً

اغ : غ ب : س ف : ف د وفي المثلثين المتشابهين ب غ ح د ف ي
فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)
اغ : غ ح : س ف : ف ي وهكذا يبرهن ان
اب : ب ح : س د : د ي وايضاً (ق ٤ ك ٦)
غ ح : ح ب : ف ي : ي د فالشكلان متساويي الزوايا والاضلاع المحيطة
بالزوايا المتساوية منها متناسبة فالشكلان متشابهان (ج ١ ك ٦)

ثم اذا فرض ان يرسم على ا ب شكلاً يشبه س د ك ي ف . ا رسم د ي وعلى
المخطط المفروض ا ب ا رسم الشكل ا ب ح غ حسباً تقدم حتى يشبه س د ي ف وعند
الانقطاع ب و ح من المخطط المستقيم ب ح اجعل الزاوية ح ب ل تعدل د ي د ك
والزاوية ب ح ل تعدل د ي ك فالزاوية الاخرى عند ل تعدل الاخرى عند ك .
ولان الشكلين ا ب ح غ س د ي ف متشابهان فالزاوية غ ح ب تعدل ف ي د
وب ح ل تعدل د ي ك فالكل غ ح ل يعدل الكل ف ي ك . وهكذا يبرهن ان
ا ب ل تعدل س د ك والشكل ذوا الخمسة الاضلاع ا غ ح ل ب يعدل الشكل ذوا
الخمسة الاضلاع س ف ي ك د . ولأن الشكلين ا غ ح ب س ف ي د متساويي
الزوايا فنسبة غ ح : ح ب : ف ي : ي د وايضاً ح ب : ح ل : ي د : د ي ك
(ق ٤ ك ٦) فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥) غ ح : ح ل : ف ي : ي ك . ولهذا السبب
ايضاً ا ب : ب ل : س د : د ك وب ل : ل ح : د ك : ك ي (ق ٤ ك ٦) لأن
المثلثين ب ل ح د ك ي متساويي الزوايا. فالشكلان ا ب ل ح غ س د ك ي ف
متساويي الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة فهما متشابهان . وعلى
هذه الكيفية يرسم على خط مستقيم مفروض شكل ذو ستة اضلاع فاكثر فيه بشكل
مفروض

الفصل التاسع عشر . ن

نسبة المثلثات المتشابهة بعضها الى بعض كبرعات اضلاعها المتشابهة

لیکن اس دے ف مثلین متشابہین ولکن الزاویتان عند بوی

متساویتین ولکن نعبۃ اب :

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

پکون ب س ی ف ضلعین

متشاپین (حد ۱۴۰۵)

فنسة المثلث ا ب ج الم



المثلث دى ف كنسبة مربع ب س الى مربع ي ف . استعلم متناسباً ثالثاً بين ب س

وی ف ای ب غ (ق ۱۱ ک ۶) حتی بکون بس ی ف ی ف ی ف ب غ . ا ر س م

اغ فلان اب:ب س:دی ف فیالمبادلة (ق ۱۶ ك ۵)

اب: دی "ب س: ی ف و لکن

بِسْ يَفِي فَبَغْ فَادَا (ق ١١ ك ٥)

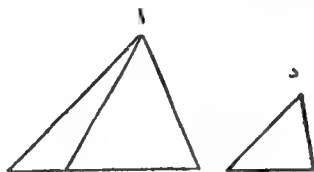
اب: دی: ی: ف: ب: غ:

فاضلاع المثليين اب غ د ي ف

المحطة بالزوايا المتساوية منها

هي متناسبة بالتكافؤ فالمثلثان

متسا، مان (ق. ٥٠ ك ٦) فالمثلث



ا ب غ ی عدل المثلک دی ف . ف ی س غ ب

ولأن ب س : ي ف :: ي ف : ب غ فتناسب ب س الى ب غ هو مربع تناسبه الى

ي. ف. وب. س. ب. غ. :: الثالث اب. س. : الثالث اب. غ. (قالك) فالثلث

اب س: المثلث اب غ: مربع ب س: مربع ي ف. والمثلث اب غ يعدل

المثلث دى ف فنبه اب س الى دى ف كبر ب س الى مربعى ف

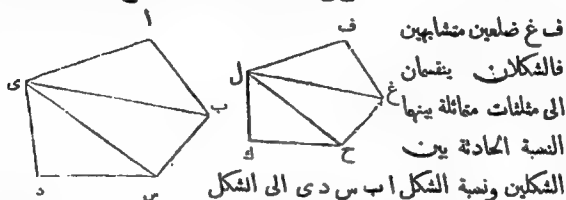
فرع. يتضمن هذه القضية انه اذا كان ثلاثة خطوط متساوية فنسبة الاول الى

الثالث كنيسة مثلث منج، عل، الا، الى مثلث مثله منج، عل، الثاني

القضية العشرون - ن

اشكال متشابهة ذات اضلاع كثيرة تنقسم الى مثلثات متماثلة عدداً

ومتشابهة بينها نفس النسبة الحادثة بين الاشكال الاصلية . ونسبة
الاشكال الاصلية بعضها الى بعض هي كمرعات اضلاعها المتشابهة
ليكن ا ب س دى ف غ ح كل شكلين لما اضلاع كثيرة وليكن ا ب



ف غ ح كل كعبة مربع ا ب الى مربع ف غ . ا ر س بى سى غ ل ح ل .
فلكون الشكل ا ب س دى يشبه الشكل ف غ ح كل فالزاوية ب اى تعدل
الزاوية غ ف ل (حد ا ك ٦) وب ا اى : غ ف : ف ل فالمثلثان ا بى
ف غ ل لما زاوية من الواحد تعدل زاوية من الاخر والاضلاع المحيطة بالزاويتين
المتساويتين متناسبة فزاويا المثلث ا بى تعدل زوايا المثلث ف غ ل (ق ٦ ك ٦)
فالمثلثان متشابهان (ق ٤ ك ٦) . ولكون الشكلين متشابهين فالزاوية ا ب س تعدل
الزاوية ف غ ح (حد ا ك ٦) فالزاوية الباقية بى ب س تعدل الباقية ل غ ح
ولكون المثلثين ا بى ف غ ل متشابهين فنسبة بى ب : ب ا : ل غ : غ ف
ولأن الشكلين متشابهان فنسبة ا ب : ب س : ف غ : غ ح (حد ا ك ٦) فبالمساواة
(ق ٢٢ ك ٥) بى ب : ب س : ل غ : غ ح فالضلعان المحيطان بالزاويتين المتساويتين
متناسبان وزوايا المثلث بى ب س تعدل زوايا المثلث ل غ ح (ق ٦ ك ٦) فها
متشابهان (ق ٤ ك ٦) وهكذا يبرهن ان المثلثين بى س د ل ح ك متشابهان فقد
انقسم الشكلان الى مثلثات متماثلة متشابهة

ونسبة هذه المثلثات بعضها الى بعض كنسبة الاشكال بعضها الى بعض فالمساوي
هي المثلثات ا بى بى سى س د والى التوالي هي المثلثات ف غ ل ل غ ح
ل ح ك . ونسبة الشكل ا ب س دى الى الشكل ف غ ح ق ل كنسبة مربع ا ب
الى مربع الضلع المشابه ف غ

لأن المثلث ا بى يشبه المثلث ف غ ل فنسبة ا بى الى ف غ ل كنسبة

مربع الضلع ب ي الى مربع الضلع غ ل (ق ١٩ ك ٦) وهكذا المثلث ب ي س :
المثلث غ ل ح :: مربع ب ي : مربع غ ل فنسبة اب ي : ف غ ل :: ب ي س :
غ ل ح (ق ١١ ك ٥) وعلى هذا الاسلوب يبرهن ان

ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ج ك

وقد يبرهن ان ي ب س : ل غ ح :: اب ي : ف غ ل . فنسبة اب ي :
ف غ ل :: ي ب س : ل غ ح :: ي س د : ل ج ك اي نسبة احد السوابق الى احد
التوالي ككل السوابق الى كل التوالي (ق ١٢ ك ٥) فالمثلث اب ي : المثلث ف غ ل
:: الشكل اب س د ي : الشكل ف غ ح ك ل ونسبة اب ي : ف غ ل :: اب :
ف غ فنسبة الشكل اب س د ي : ف غ ح ك ل :: مربع اب : مربع ف غ

فرع اول . هكنا
يبرهن في اشكال
ذات اربعة او ستة غ
اضلاع فاكثر ان نسبة
بعضها الى بعض كمبة
مربعات اضلاعها المتشابهة

فرع ثان . اذا استعمل متناسب ثالث بين الضلعين المتشابهين اب ف غ مثل
خط م اي اب : ف غ :: ف غ : م فلان الشكل على اب : الشكل على ف غ ::
مربع اب : مربع ف غ فنسبة اب : م :: الشكل على اب : الشكل على ف غ حمبا
نقدم في المثلثات (فرع ق ١٩ ك ٦) فاذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة تكون نسبة
الاول الى الثالث كمبة شكل على الاول الى شكل . مثله على الثاني

فرع ثالث . المربعات متشابهة . فنسبة مربع الى مربع كمبة مربع ضلع من
الواحد الى مربع ضلع من الاخر . وهكذا في كل الاشكال المتشابهة ذات اضلاع
مستقيمة اي احدها الى الاخر كمربعات اضلاعها المتشابهة

تعليقة . شكلان مركبان من مثلثات متماثلة متشابهة هما متشابهان . فبمشابهة
المثلثين لنا ي اب = ل ف غ اب ي = ف غ ل ي ب س = ل غ ح فانا
اب س = ف غ ح وب س د = غ ح ك وهم جراً وايضاً ي ا : ل ف :: اب :

ف غ :: ي ب : ل غ :: ب س : غ ح ولم جراً فالزوايا والاضلاع متناسبة
فالشكلان متشابهان

القضية الحادية والعشرون . ن

اشكال ذات اضلاع مستقيمة متشابهة بشكل واحد ذي اضلاع
مستقيمة هي متشابهة بعضها لبعض

ليكن ا وب شكلين مستقيمي الاضلاع شبيهين بشكل آخر ذي اضلاع مستقيمة
مثل س فيها متشابهان



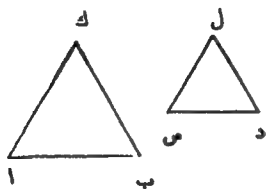
لأن ا يشبه س فيها متساويا
الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا
المتساوية متناسبة (حد ا ك ٦)

ولأن ب يشبه س فيها متساويا الزوايا والاضلاع المحيطة بالزوايا المتساوية متناسبة
(حد ا ك ٦) فزوايا كل واحد من الشكلين ا وب تعدل زوايا الشكل س والاضلاع
المحيطة بالزوايا المتساوية منها متناسبة فالشكلان متساويا الزوايا (حد ا ك ١)
واضلاعها الموائية لهذه الزوايا متناسبة (ق ١١ ك ٥) فالشكل ا ي ب الشكل ب
(حد ا ك ٦)

القضية الثانية والعشرون . ن

اذا كانت اربعة خطوط مستقيمة متناسبة فالاشكال المتشابهة ذات
الاضلاع المستقيمة المبنية على هذه الخطوط تكون متناسبة ايضاً . واذا
كانت هذه الاشكال متناسبة فالخطوط التي بُنيت عليها تكون
متناسبة ايضاً

ليكن ا ب س د ي ف غ ح اربعة خطوط مستقيمة متناسبة اي ا ب : س د



١١: ف: غ ح ولرسم

على اب وس د شكلان

متشابهان لما اضلاع ط

مستقيمة ك اب ل س د

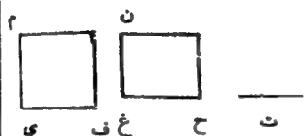
ولرسم على ي ف غ ح

شكلان متشابهان لما

اضلاع مستقيمة م ف

ن ح فتكون نسبة

ك اب : ل س د : ١١



م ف : ن ح

ليكن ط خطأ مستقيماً ومتناسباً ثالثاً للخطين اب س د والخط المستقيم ت

متناسباً ثالثاً للخطين ي ف غ ح (ق ١١ ك ٦) فليكون

اب : س د : ١١: ف: غ ح وايضاً

س د : ط : ١١: غ ح : ت (ق ١١ ك ٥) فبالمساواة (ق ٢٢ ك ٥)

اب : ط : ١١: ف : ت ولكن

اب : ط : ك اب : ل س د (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦) فانما

ي ف : ت : م ف : ن ح فيكون

ك اب : ل س د : م ف : ن ح (فرع ٢ ق ٢٠ ك ٦)

ثم اذا فرض ان نسبة ك اب : ل س د : م ف : ن ح تكون نسبة اب : س د :

ي ف : غ ح

اجعل نسبة اب : س د : ١١: ف: ق ر (ق ١٢ ك ٦) وعلى ق ر ارسم

الشكل المستقيم الاضلاع ص ر حتى يشبه م ف ا ون ح شكلاً ووضعاً (ق ١٨ ك ٦)

فلان اب : س د : ١١: ف: ق ر وقد رُسم على اب وس د شكلان متشابهان

شكلاً ووضعاً ك اب ول س د ومكنا على ي ف ق ر قد رُسم شكلان متشابهان

شكلاً ووضعاً م ف و ص ر فتكون نسبة ك اب : ل س د : م ف : ص ر .

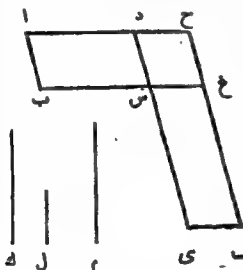
وبالمفروض ك اب : ل س د : م ف : ن ح فالشكل المستقيم الاضلاع م ف ل

تناسب واحد للشكلين ن ح ص ر فهما متساويان (ق ٩ ك ٥) وهما متشابهان ايضاً

شكلاً ووضعاً فالخط $ح$ يعدل الخط $ق$ ولان $اب:س:د::ي:ف:ق$ و $ق:ر:ر$
 $= غ:ح$ فتكون نسبة $اب:س:د::ي:ف:غ:ح$

القضية الثالثة والعشرون . ن

تناسب اشكال متوازية الاضلاع متساوية الزوايا بعضها الى بعض
 هو التناسب المركب من تناسبات اضلاعها



ليكن $اس$ $س$ $ف$ شكلين متوازيي
 الاضلاع. والزوايا $ب$ $س$ $د$ فلتعدل الزاوية
 $ي$ $س$ $غ$ فتناسب $اس$ الى $س$ $ف$ هو
 التناسب المركب من تناسبات اضلاعها
 ليوضع $ب$ $س$ $وس$ $غ$ على استقامة واحدة
 فيكون $ي$ $س$ $س$ $د$ ايضا على استقامة واحدة
 (ق ١٤ ك ١) ثم الشكل $دغ$. ثم عين خطا

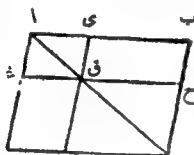
مستقيماً مثل $ك$ واجعل تناسب $ب$ $س$ $س$ $غ$ $ك$ $ل$ (ق ١٢ ك ٦) وتناسب
 $د$ $س$ $ي$ $ل$ $م$ فتناسبات $ك$ الى $ل$ ول الى $م$ في مثل تناسبات الاضلاع
 اي تناسب $ب$ $س$ الى $س$ $غ$ وتناسب $د$ $س$ الى $س$ $ي$. ولكن تناسب $ك$ الى $م$ هو
 المركب من تناسب $ك$ الى $ل$ مع تناسب $ل$ الى $م$ (حد ١٠ ك ٥) فتناسب $ك$ الى $م$
 هو المركب من تناسبات اضلاع الشكلين. ولان $ب$ $س$ $س$ $غ$ $ك$ $ل$ $م$ $ن$ $ح$
 (ق ١٦ ك ٦) وب $س$ $س$ $غ$ $ك$ $ل$ فيكون $ك$ $ل$ $م$ $ن$ $ح$ (ق ١١ ك ٥)
 ولان $د$ $س$ $ي$ $ل$ $م$ $ن$ $ح$ $س$ $ف$ و $د$ $س$ $ي$ $ل$ $م$ فيكون $ل$ $م$ $ن$
 $س$ $ح$ $س$ $ف$ (ق ١١ ك ٥)

وقد يبرهن ان $ك$ $ل$ $م$ $ن$ $ح$ $س$ $ف$ $ل$ $م$ $ن$ $ح$ $س$ $ف$ فيالمساواة
 (ق ٢٢ ك ٥) $ك$ $ل$ $م$ $ن$ $ح$ $س$ $ف$ ولكن تناسب $ك$ الى $م$ هو المركب من تناسبات
 اضلاع الشكلين كما تقدم. فتناسب $اس$ الى $س$ $ف$ هو المركب من اضلاعها
 فرع اول. شكلان قائما الزوايا احدهما الى الاخر كحاصل قاعدتيهما في طولها
 فرع ثان. مساحة شكل متوازي الاضلاع تعدل مسطح القاعدة في العلو

فرع ثالث . مساحة مثلث تعدل مسطح قاعدته في نصف علوه .

القضية الرابعة والعشرون . ن

الاشكال المتوازية الاضلاع على جانبي قطر شكل متوازي الاضلاع
هي متشابهة بعضها لبعض وللشكل كله



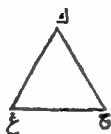
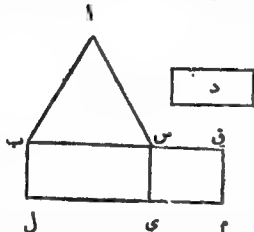
ليكن ا ب س د شكلاً متوازي الاضلاع واس
قطره وي غ ح ك شكلي متوازي الاضلاع على
جانب القطر فهما متشابهان وبشبهان كل الشكل
ا ب س د

لان د س يوازي غ ق والزواية ا د س تعدل
الزواية ا غ ق (ق ٢٩ ك ١) ولان ب س يوازي ي ق والزواية ا ب س تعدل
الزواية ا ي ق وكل واحد من الزاويتين ب س د ي ق غ تعدل المقابلة د ا ب
(ق ٢٤ ك ١) فهما متساويتان والشكلان ا ب س د ا ي ق غ متساويا الزوايا
ولان الزواية ا ب س تعدل الزواية ا ي ق والزواية س ا ب مشتركة بين المثلثين
ب ا س ي ا ق فهما متساويا الزوايا و ا ب س س ا ي ي ق (ق ٤ ك ٦)
ولكون الاضلاع المتقابلة من شكل متوازي الاضلاع هي متساوية (ق ٢٤ ك ١) يكون
ا ب : ا د :: ا ي : ا غ (ق ٧ ك ٥) و د س : س ب :: غ ق : ق ي و س د : د ا ::
ق غ : غ ا فاضلاع الشكلي ا ب س د ا ي ق غ المحيطة بالزوايا المتساوية هي
متناسبة فهما متشابهان (حد ١ ك ٦) ولهذا السبب ايضاً الشكل ا ب س د يشابه
الشكل ق ح س ك فكل واحد من الشكلي غ ي ك ح يشبه د ب والاشكال
المستقيمة الاضلاع التي تشبه شكلاً واحداً مستقيم الاضلاع هي متشابهة بعضها لبعض
(ق ٢١ ك ٦) فالشكل غ ي يشبه الشكل ك ح

القضية الخامسة والعشرون . ع

علينا ان نرسم شكلاً مستقيم الاضلاع حتى يشبه شكلاً مفروضاً مستقيم
الاضلاع ويعدل شكلاً آخر مفروضاً مستقيم الاضلاع

ليكن ا ب س شكلاً مفروضاً مستقيماً والاضلاع ود شكلاً آخر مفروضاً مستقيماً



الاضلاع . علينا ان نرسم
شكلاً مستقيماً الاضلاع
يعدل د ويشبه ا ب س
ارسم الشكل
المتوازي الاضلاع ب ي
على الخط المستقيم ب س

حتى يعدل ا ب س (فرع ق ٤٥ ك ١) وعلى س ي ارسم شكلاً متوازي الاضلاع
س م حتى يعدل د (فرع ق ٤٥ ك ١) واجعل الزاوية ق س ي منه تعدل الزاوية
س ب ل فيكون ب س وق س على استقامة واحدة ول ي و ي م كذلك (ق ٢٩
ك ١ اوق ١٤ ك ١) استعلم متناسباً متوسطاً بين ب س وس ق مثل غ ح (ق ١٢ ك ٦)
وارسم على غ ح شكلاً مستقيماً الاضلاع ك غ ح حتى يشبه ا ب س شكلاً ووضعاً
(ق ١٨ ك ٦)

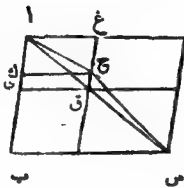
فلكون نسبة ب س : غ ح :: غ ح : س ق فالشكل ا ب س : ك غ ح :: ب س :
س ق (فرع ثان ق ٢٠ ك ٦) وب س : س ق :: ب ي : س م (ق ١ ك ٦)
فتكون نسبة ا ب س : ك غ ح :: ب ي : س م (ق ١١ ك ٥) والشكل ا ب س
يعدل ب ي فالشكل ك غ ح يعدل س م (ق ١٤ ك ٥) والشكل س م يعدل د
فالشكل ك غ ح يعدل د ايضاً وهو يشبه الشكل ا ب س وذلك ما كان علينا
ان نعلمه



الفصل السادسة والعشرون . ن

شكلان متوازي الاضلاع متشابهان اذا كان لهما زاوية مشتركة وتشابهان
وضعاً فهما على جانبي قطر واحد

ليكن ا ب س د ا ب ي ق غ شكلين متوازي الاضلاع متشابهين شكلاً ووضعاً



ولكن الزاوية د ا ب مشتركة بينهما فالشكلان على
جانبَي قطري واحد
والا فليكن ا ح س قطر الشكل ب د واق
قطر الشكل د ا غ والخط غ ق فليقطع ا ح س في
النقطة ح ومن ح ارمح ك حتى يوازي ا د ا و ب س س
فالشكلان ا ب س د ا ك ح غ متشابهان لانها على جانبي قطر واحد (ق ٢٤ ك ٦)
ود ا ا ب " غ ا ا ك (ح د ا ك ٦) وقد فُرض ان ا ب س د ا ي ق غ متشابهان
فتكون لمبة د ا ا ب " غ ا ا ي فتكون نسبة غ ا ا ي " غ ا ا ك (ق ١١ ك ٥)
فاذا ا ك = ا ي (ق ٩ ك ٥) اي الاصغر يعدل الاكبر وذاك محال فلا يكون
ا ك ح غ ا ب س د على جانبي قطر واحد بالضرورة يكون ا ب س د ا ي ق غ
على جانبي قطر واحد

القضية السابعة والعشرون . ن

من جميع الاشكال القائمة الزوايا التي تحيط بها اقسام خط مستقيم

فاعظمها مربع نصف الخط

ليكن ا ب خطا مستقيما ولينصف في س وليكن د ا ب نقطة كانت فيه فالمربع

على ا س هو اعظم من القائم الزوايا ا د ا ب ب د د س ا

فلكون الخط المستقيم ا ب قد انقسم الى قسمين متساويين في س وغير متساويين

في د فالقائم الزوايا ا د ا ب ب د مع مربع س د يعدل مربع ا س (ق ٥ ك ٢) فاذا

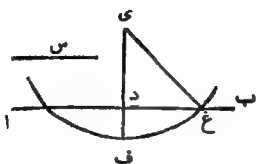
مربع ا س هو اكبر من القائم الزوايا ا د ا ب

القضية الثامنة والعشرون . ع

علينا ان نقسم خطا مستقيما مفروضا حتى يعدل القائم الزوايا مسطح

فسمي مساحة مفروضة ولا تكون تلك المساحة اعظم من مربع نصف

الخط

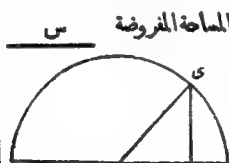


ليكن اب الخط المستقيم المفروض
ومربع س المساحة المفروضة. علينا ان
نقسم اب الى قسمين مسطهما يعدل مربع
س ولا يكون اعظم من مربع نصف اب

نصف اب في د مربع ا د اذا عدل مربع س فهو المطلوب والا فيكون ا د
اعظم من س حسب المفروض. ارم دى عموداً على اب حتى يعدل س. اخرج
ى د الى ف واجعل ى ف يعدل ا د او د ب. ومن المركز ى والبعد ى ف ارم
دائرة تقطع اب في غ وارم ى غ. فليكون اب قد انقسم الى قسمين متساويين في
د وغير متساويين في غ فالتائم الزوايا اغ \times غ ب + د غ = د ب (ق ٥ ك ٢) =
ى غ ولكن ى د + د غ = ى غ (ق ٤٧ ك ١) فاذا اغ \times غ ب + د غ = ى د
+ د غ اطرح د غ فالباقى اغ \times غ ب = ى د وى د = س فالتائم الزوايا اغ
 \times غ ب = س وذلك ما كان علينا ان نعله

القضية التاسعة والعشرون. ع

علينا ان نخرج خطاً مستقيماً مفروضاً حتى ان التائم الزوايا مسطح الخط
مع ما زيد اليه في الجزء المزيد يعدل مساحة مفروضة



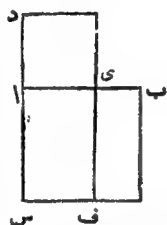
ليكن اب الخط المستقيم المفروض ومربع س المساحة المفروضة
نصف اب في د وارم بى عموداً عليه
واجعل بى يعدل س. ارم ى د وعلى المركز
د والبعد دى ارم دائرة تقطع اب بعد اخراج
فى غ

فليكون اب قد تنصّف في د واخرج الى غ (ق ٦ ك ٢) فالتائم الزوايا اغ \times
غ ب + د ب = د غ = دى. ولكن دى (ق ٤٧ ك ١) = د ب + بى فالتائم
الزوايا اغ \times غ ب + د ب = د ب + بى واغ \times غ ب = بى وبى =
س فاذا اغ \times غ ب = س وذلك ما كان علينا ان نعله

الفضية الثلاثون . ع

علينا ان نقسم خطاً مستقيماً حتى يكون احد القسمين متناسباً متوسطاً
بين الخط كله والقسم الآخر

ليكن اب الخط المستقيم المفروض . ارسم على اب مربعا (ق ٤٦ ك ١) ب س



واخرج س الى د حتى ان القائم الزوايا س د خ دا

يعدل المربع س ب (ق ٢٩ ك ٦) اجعل اى يعدل

ا د وتم القائم الزوايا د ف اى د س خ اى او د س

خ دا فلكون س د خ دا = س ب فالشكل د ف =

س ب اطرح الجزء المشترك س ي فالباقي د ي =

الباقي ب ف وب ف هو القائم الزوايا ف ي خ ي ب

او اب خ ب ي . ود ي هو المربع على اى فالخط اى هو متناسب متوسط بين

اب وب ي (ق ١٧ ك ٦) اي اب : اى : ب ي وب هو اعظم من اى

فيكون اى اعظم من ي ب (ق ١٤ ك ٥) فقد انقسم الخط اب على نسبة متوسطة

(حد ٢ ك ٦)

طريقة اخرى

ليكن اب الخط المفروض . اقم اب في س حتى

ان القائم الزوايا اب خ ب س يعدل اس (ق ١١ ك ٢) فلكون اب خ ب س =

اس تكون نسبة اب : اس : س ب (ق ١٧ ك ٦) اي اس متناسب

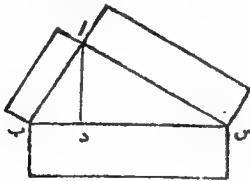
متوسط بين اب وس ب (حد ٢ ك ٦)

الفضية الحادية والثلاثون . ن

في كل مثلث ذي قائمة ذوا اضلاع المستقيمة المرسوم على الضلع الذي

يقابل القائمة يعدل الشكليين المتشابهين به هيئة ووضعاً المرسومين

على الضلعين المحيطين بالقائمة

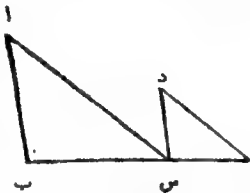


ليكن اب س مثلثا ذا قائمة ب اس
فدو الاضلاع المستقيمة المرسوم على ب س
يعدل الشكلين المتشابهين بوجهة ووضعاً
المرسومين على ب ا و س
ارسم العمود ا د . فلأن ا د قد رُم

عموداً من القائمة على القاعدة فالمثلثان ا د ب ا د س متشابهان ويشبهان كل المثلث
اب س ايضاً (ق ٨ ك ٦) ونسبة س ب : ب ا :: ب ا : ب د (ق ٤ ك ٦) وليكون
هذه المخطوط الثلاثة المستقيمة متناسبة تكون نسبة الاول الى الثالث كنسبة شكل على
الاول الى شكل . مثله هيئة ووضعاً على الثاني (فرع ثان ق ٢٠ ك ٦) فنسبة س ب :
ب د :: شكل على س ب : مثله هيئة ووضعاً على ب ا . وبالقلب (ق ب ك ٥)
د ب : ب س :: الشكل على ب ا : مثله على ب س . وهكذا ايضاً د س : س ب ::
الشكل على س ا : مثله على س ب . فاذن ب د + د س : ب س :: الشكل على
ب ا + الشكل على ا س : الشكل على ب س (ق ٢٤ ك ٥) فالشكلان على ب ا
و ا س معاً يعدلان الشكل على ب س وفي اشكال متشابهة

القضية الثانية والثلاثون . ن

مثلثان ضلعان من الواحد مناسبان لضلعين من الآخر اذا وُضعت
زاوية من الواحد بملامسة زاوية من الآخر حتى تكون اضلاعها المتشابهة
متوازية يكون الضلعان الآخران على استقامة واحدة



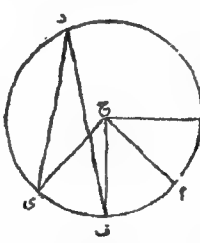
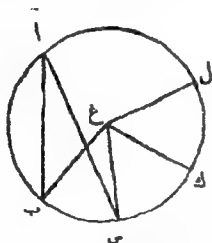
ليكن اب س د س ي مثلثين
والضلعان ب ا ا س فليناسبيا د د ي
اي ب ا : ا س :: د د : د ي وليكن اب
ود س متوازيين و ا س و د ي متوازيين
فيكون ب س و س ي على استقامة واحدة

لأن الخط المستقيم اس يلاقي المتوازيين اب د س فالزاويتان المتبادلتان
ب ا س ا س د متماويتان (ق ٢٩ ك ١) ولهما السبب ايضاً الزاوية س د ي تعدل

الزاوية اس د فالزاوية ب اس تعدل س د ي والثلاثان لما الزاوية عند د تعدل
الزاوية عند ا والاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين متناسبة اي ب ا : اس ::
س د : د ي فزوايا الثلث اب س تعدل زوايا الثلث د س ي (ق ٦ ك ٦)
فالزاوية اب س تعدل د س ي . وقد تبين ان ب اس تعدل اس د فلكل
اس ي يعدل الزاويتين اب س ب اس . اصف الزاوية المشتركة اس ب الى
الجانبيين فالزوايا ان اس ي اس ب تعدلان اب س ب اس اس ب وهذه
الثلاث تعدل قائمتين (ق ٢٣ ك ١) فاذا اس ي اس ب تعدلان قائمتين
فالخطان ب س س ي على استقامة واحدة (ق ١٤ ك ١)

الفضية الثالثة والثلاثون . ن

في دوائر متساوية نسبة الزوايا في المركز او في المحيط بعضها الى بعض
كنسبة الاقواس التي تقابلها بعضها الى بعض . وهكذا القطعان ايضاً
لتكن اب س د ي ف دائرتين متساويتين فنسبة الزاوية في المركز ب غ س
الى الزاوية في المركز ح ف والزاوية في المحيط ب اس الى الزاوية في المحيط
ي د ف كنسبة القوس ب س الى القوس ي ف والقطاع ب غ س : القطاع
ي ح ف :: القوس ب س : القوس ي ف



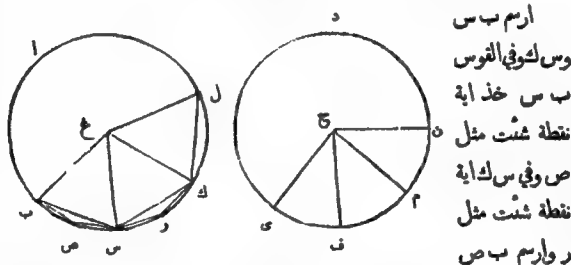
في الدائرة

ا ب س اقطع
اقواساً تعدل
القوس ب س
مثل س ك
وكل وفي الدائرة

د ي ف اقطع اقواساً تعدل القوس ي ف مثل ف م ن . ارم غ ك غ ل ح م
ح ن فالزوايا ب غ س س غ ك ك غ ل متساوية لان الاقواس ب س س ك
ك ل متساوية (ق ٢٧ ك ٢) فاي مضروب كانت القوس ب ل من القوس ب س
كانت ب غ ل ذات ملا المضروب من ب غ س وعلى ملا الاسلوب بتضح ان

ي ح ن ذات المضروب من ي ح ف الذي كانت القوس ي ن من القوس ي ف
والقوس ب ل اذا عدلت القوس ي ن فالزاوية ب غ ل تعدل الزاوية ي ح ن
(ق ٢٧ ك ٢) وإن كان اعظم فاعظم وإن كان اصغر فاصغر فنسبة ب س : ي ف
:: ب غ س : ي ح ف (حد ه ك ه) ولكن ب غ س : ي ح ف :: ب ا س : ي د ف
(ق ١٥ ك ه) لأن كل واحدة مضاعف نظيرها (ق ٢٠ ك ٢) فنسبة القوس
ب س : القوس ي ف :: الزاوية ب غ س : الزاوية ي ح ف ونسبة الزاوية ب ا س
: الزاوية ي د ف

كذلك القطاع ب غ س : القطاع ي ح ف :: القوس ب س : القوس ي ف



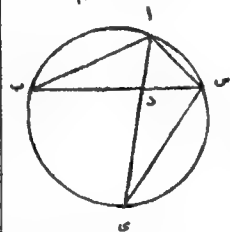
ص س س ر ر ك . فضلان من المثلث غ ب س اي ب غ غ س يعدلان
ضلعين من المثلث غ س ك اي س غ غ ك والزاوية ب غ س = س غ ك فالقاعدة
ب س = القاعدة س ك (ق ٤ ك ١) والمثلث ب غ س = المثلث س غ ك . ولكون
القوس ب س = القوس س ك فالباقي من كل المحيط ب ا س يعدل الباقي س ا ك
فالزاوية ب ص س تعدل الزاوية س ر ك (ق ٢٧ ك ٢) والقطعة ب ص س تشبه
القطعة س ر ك (حد ٩ ك ٢) وهما على خطين مستقيمين متساويين ب س وس ك فيها
متساويان (ق ٢٤ ك ٢) فالقطعة ب ص س تعدل القطعة س ر ك وهكذا ايضا
يبرهن ان القطاع ك غ ل يعدل ب غ س او س غ ك . وهكذا يبرهن ايضا ان
القطاعان ي ح ف ف ح م ح ن متساوية . فاي مضروب كانت القوس ب ل
من القوس ب س فالقطاع ب غ ل هو ذات ذلك المضروب من القطاع
ب غ س وهكذا ايضا اي مضروب كانت القوس ي ن من القوس ي ف فالقطاع
ي ح ن هو ذات ذلك المضروب من القطاع ي ح ف . فالتوس ب ل اذا

صلت القوسى ن فالتقاطع ب غ ل يعدل القطاعى ح ن وإذا كانت اكبر
فأكبر وإذا كان اصغر فاصغر فأذا (حده كه) القوس ب س : القوسى ف :
القطاع ب غ س : القوسى ح ف

فضية ب . ن

إذا تنصفت زاوية مثلث بخط مستقيم يقطع القاعدة أيضاً فالقائم الزوايا
مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح قسي القاعدة مع مربع
الخط المستقيم الذي ينصف الزاوية

ليكن اب س مثلثاً ولتنصف الزاوية ب ا س منه بالخط المستقيم اد الذي
يقطع القاعدة في النقطة د . فالقائم الزوايا ب ا
$$ا س \times ا س = ب د \times د س + ا د^2$$



ارسم دائرة تمحيط بالمثلث اب س (ق ٥
ك ٤) واخرج اد حتى يلاقي المحيط في س ويرسم
س اى والزاوية اب د تعدل الزاوية اى س

(ق ٢١ ك ٢) لانهما في قطعة واحدة فالمثلثان اب د اى س متساويا الزوايا ونسبة
ب ا : ا د :: س ا : ا س (ق ٤ ك ٦) فأذا ب ا \times ا س = ا د \times اى (ق ٦ ك ٦)
= س اى \times ا د + ا د \times ا د (ق ٢ ك ٢) وى د \times ا د = ب د \times د س (ق ٢٥ ك ٢) فأذا
ب ا \times ا س = ب د \times د س + ا د \times ا د

فضية ج . ن

إذا رُسم من زاوية مثلث خط مستقيم عمود على القاعدة فالقائم الزوايا
مسطح ضلعي المثلث يعدل القائم الزوايا مسطح العمود وقطر الدائرة
المحيطة بالمثلث

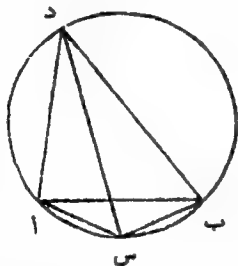
ليكن اب س مثلثاً ويرسم العمود اد على القاعدة ب س من الزاوية عند ا .

من $ي + ب د \times ا ي = ب د \times ا س$ (ق الك ٢) فالقائم الزوايا $ب د \times ا س =$
 $ا ب \times س د + ا د \times ب س$

قضية ٥٥. ن

اذا تنصفت قوس دائرة ورسم من طرفها ومن نقطة الانتصاف
 خطوط مستقيمة الى نقطة ما من المحيط تكون نسبة مجموع الخطين
 المرسومين من طرفي القوس الى الخط المرسوم من نقطة انتصافه
 كنسبة وتر القوس الى وتر نصفها

لكن $ا ب د$ دائرة وتنصف القوس $ا ب$ منها $ب س$ ولترسم المخطوط
 المستقيمة $ا د س د ب د$ من طرفي القوس
 ومن نصفها الى النقطة $د$ من المحيط فنسبة
 مجموع الخطين $ا د ب د$ الى $س د$ كنسبة
 $ب ا$ الى $ا س$



لكون $ا د ب س$ ذا اربعة اضلاع في
 دائرة وقطره $ا ب$ و $د س$ فالقائم الزوايا $ا د$
 $س ب + ب د \times ا س = ا ب \times س د$

(ق الك ٦) ولكن $ا د \times س ب + ب د \times ا س = ا د \times ا س + د ب \times ا س$ لان
 $ا س = س ب$ فاذا $ا د \times ا س + ب د \times ا س ا ي$ (ق الك ٢) $(ا د + د ب) \times$
 $ا س = ا ب \times س د$. واضلاع اشكال متساوية قائمة الزوايا هي متناسبة بالتكافؤ
 (ق الك ٦) فتكون نسبة $ا د + د ب : د س :: ا ب : ا س$

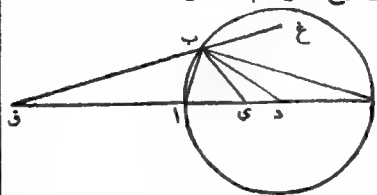
قضية ٥٦. ن

اذا تعينت نقطتان في قطر دائرة بعد اخراجه حتى ان القائم الزوايا
 مسطح القسمين بين النقطتين ومركز الدائرة يعدل مربع نصف القطر

ورُسم من هاتين النقطتين خطان مستقيمان الى نقطة ما من المحيط
تكون نسبة احدهما الى الآخر كنسبة احد قسبي القطرين بين احدي
النقطتين المذكورتين والمحيط الى الآخرين النقطة الاخرى والمحيط

لكن اب س دائرة مركزها د . اخرج داوعين فيو نقطتين ي وق حتى ان
القائم الزوايا ي د خ د ق يعدل مربع ا د ولرسم ي ب ق الى ب نقطة من المحيط
فتكون نسبة ق ب :

ب ي :: ق ا : ا ي
ارسم ب د . فلكون
القائم الزوايا ق د خ د ي
يعدل مربع ا د اود ب



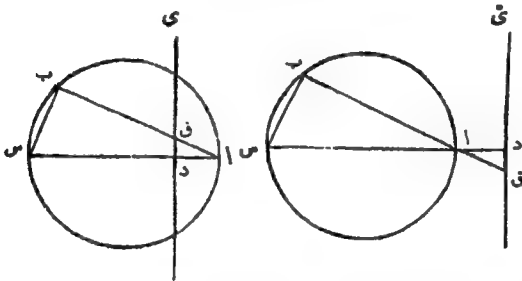
فنسبة ق د : د ب :: د ب : د ي (ق ١٧ لك ٦) . فالمثلثان ق د ب ب د ي
اضلاعها المحيطة بالزاوية المشتركة د هي متناسبة وها ايضا متساويا الزوايا (ق ٦ لك ٦)
والزاوية د ي ب تعدل د ب ق و د ب ي تعدل د ق ب . ولكون الاضلاع
المحيطة بهذه الزوايا المتساوية متناسبة (ق ٤ لك ٦) فنسبة ق ب : ب د :: ب ي : د ي
وبالمبادلة (ق ١٦ لك ٦) ق ب : ب ي :: ب د : د ي داوق ب : ب ي :: ا د : د ي
ولأن ق د : د ا :: د ا : د ي فبالقسمة (ق ١٧ لك ٥) ق ا : ا ي :: ا ي : د ي وبالمبادلة
(ق ١١ لك ٥) ق ا : ا ي :: ا ي : د ا . وقد تبين ان ق ب : ب ي :: ا د : د ي
فتكون نسبة ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي

فرع . اذا رسم اب فلكون ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي تكون الزاوية ق ب ي
قد تنصفت بالمحيط اب (ق ٢ لك ٦) . ولأن ق د : د س :: د س : د ي وبالتركيب
(ق ١٨ لك ٥) ق س : د س :: د س : د ي د وقد تبين ان ق ا : ا د اود س :: ا ي :
ي د فبالساواة ق ا : ا ي :: ق س : س ي . ولكن ق ب : ب ي :: ق ا : ا ي فاذا
ق ب : ب ي :: ق س : س ي (ق ١١ لك ٥) فاذا اخرج ق ب الى غ ورسم ب س
فالزاوية ي ب غ تنصف بالمحيط ب س (ق ١ لك ٦)

قضيه ز . ن

اذا رُسم من طرف قطر دائرة خطٌ مستقيمٌ في الدائرة واذا لاقى خطاً
عموداً على القطر داخل الدائرة او خارجها بعد اخراجه فالقائم الزوايا
مسطح الخط المستقيم في الدائرة والنقسم منه الواقع بين طرف القطر
والخط العمودي على القطر بعدل القائم الزوايا مسطح القطر والنقسم
منه المقطوع بالعمود عليه

لتكن ا ب س دائرة قطرها ا س وليكن د ي عموداً على القطر ا س وليلاق



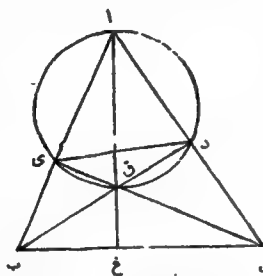
ا ب في ق فالقائم الزوايا ب ا ق = س ا ق

ارسم ب س فالزاوية ا ب س قائمة لانهما في نصف دائرة (ق ٢١ ك ٢)
و ا د ق ايضاً قائمة حسب المفروض والزاوية ب ا س هي ذات الزاوية د ا ق او
مقابلة لها فالثلثان ا ب س ا د ق متساويا الزوايا ونسبة ب ا : ا س :: ا د : ا ق
(ق ٤ ك ٦) فالقائم الزوايا ب ا ق = س ا ق

قضيه ح . ن

العمديّات من زوايا مثلث الى الاضلاع المتقابلة لتقاطع في نقطة
واحدة

ليكن ا ب س مثلثاً و ب د و س ي عمودين يتقاطعان في ق



ارسم ا ق وليخرج حتى يلاقي ب س في
غ . فالخط ا غ عمود على ب س . ارسم د ي
وارسم الدائرة ا ي ق تحيط بالثلث ا ي ق
فلكون ا ي ق قائمة فالخط ا ق قطر الدائرة
المحيطة بالثلث ا ي ق (ق ٢١ ك ٢) و ا ق
ايضاً قطر الدائرة المحيطة بالثلث ا د ق
فالنقط ا ي ق د في محيط دائرة واحدة . س

ولكون الزاوية ي ق ب تعدل الزاوية د ق س (ق ٥ ك ١) والزاوية ب ي ق تعدل
س د ق لانها قائمتان فالثلثان ب ي ق س د ق متساويان الزوايا ونسبة ب ي ق
ي ق :: س ق :: د ق (ق ٤ ك ٦) وبالمبادلة ب ي ق :: س ق :: ي ق د ق (ق ١٦ ك ٥)
فلكون الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين ب ي ق س ي ق د متناسبة فالثلثان
ب ي ق س ي ق د متساويان الزوايا (ق ٦ ك ٦) فالزاوية ق س ب تعدل ي د ق
ولكن ي د ق تعدل ي ا ق لانها في قطعة واحدة (ق ٢١ ك ٢) فالزاوية ي ا ق
تعدل الزاوية ق س غ والزاويتان ا ق ي س ق غ متساويتان ايضاً لانها متقابلتان
(ق ١٥ ك ١) فالباقيتان ا ي ق ق غ س متساويتان ايضاً (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١)
ولكن ا ي ق قائمة فتكون ق غ س ايضاً قائمة وا غ عمود على ب س

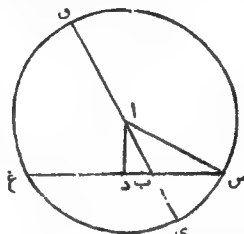
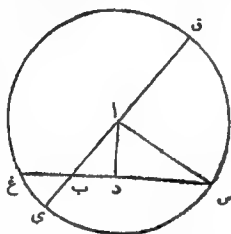
فرع . المثلث ا د ي يشبه المثلث ا ب س . لان المثلثين ب ا د س ا ي هما
الزاويتان عند د و ي قائمتان والزاوية عند ا مشتركة بينهما فنسبة ب ا : د ا :: س ا :
ا ي وبالمبادلة ب ا : س ا :: د ا : ا ي . فالثلثان ب ا س د ا ي هما الزاوية عند ا
مشتركة بينهما والاضلاع المحيطة بها متناسبة فيها متساويان الزوايا ومتشابهان (ق ٦ ك ٦)
القائم الزوايا ب ا ي = س ا د

فضية ط . ن

اذا رسم من زاوية مثلث عمود على القاعدة فالقائم الزوايا مسطح مجتمعا

الضلعين الآخرين في فضلتهما يعدل القائم الزوايا مسطح مجتمع قسي
القاعدة في فضلتهما

ليكن اب س مثلثا ومن الزاوية ب اس يُرسم اد عمودا على القاعدة ب س



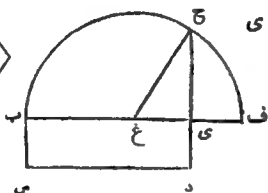
فالقائم الزوايا (ا س + اب) X (ا س - اب) = (س د + دب) X (س د - دب)
اجعل ا مركزا واس اطول الضلعين نصف قطري وارسم الدائرة س ق غ
واخرج ب ا حتى يلاقي المحيط في ق وي . واخرج س ب حتى يلاقي المحيط في غ .
فلأن اق = اس فالحظ ب ق = اب + اس مجتمع الضلعين ولان اي = اس
فالحظ ب ي = اس - اب فضلة الضلعين . ولكون اد عمودا من المركز على غ س
فهو ينصفه ايضا فاذا وقع العمود داخل المثلث فالحظ ب غ = د غ - دب =
د س - دب = فضلة قسي القاعدة وب س = دب + د س = مجتمع قسي القاعدة
واذا وقع اد خارج المثلث فالحظ ب غ = د غ + دب = س د + دب = مجتمع
القسمين وب س = س د - دب = فضلتهما . وعلى الحالتين لان الخطين ق ي
غ س يتقاطعان في ب فالقائم الزوايا ق ب X ب ي = س ب X ب غ او حسبها
نقلم (ا س + اب) X (ا س - اب) = (س د + دب) X (س د - دب)

عمليات ملحقات بالكتاب السادس

فضية ي . ع

علينا ان نرسم مربعا يعدل شكلا مفروضا ذا اضلاع مستقيمة

ليكن α الشكل المفروض ذا الاضلاع المستقيمة . علينا ان نرسم مربعاً يعادل α



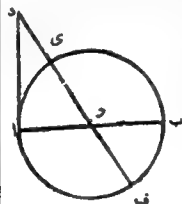
ارسم القائم الزوايا $\beta \gamma \delta$ حتى يعادل α (ق ٤٥ ك ١)
واخرج احد اضلاع $\beta \gamma$
واجعل $\gamma \delta$ يعادل $\gamma \epsilon$
نصف $\beta \gamma$ في γ واجعل

γ مركزاً و $\gamma \delta$ نصف قطر وارسم نصف الدائرة $\beta \gamma \delta$ واجز $\delta \gamma$ الى ح
فيكون ح γ - $\beta \gamma$ χ $\gamma \delta$ (ق ١٢ ك ٦) $\beta \gamma = \delta \gamma = \alpha$ فالربع على ح γ يعادل α

قضية ك . ع

علينا ان نرسم شكلاً قائم الزوايا يعادل مربعاً مفروضاً وفضله ضلعيه
المتواليين تعادل خطاً مفروضاً

ليكن α ضلعاً من المربع المفروض و $\beta \gamma$ فضله ضلعي الشكل المطلوب



ارسم على $\alpha \beta$ دائرة ومن طرف القطر ارسم المماس
 $\alpha \delta$ حتى يعادل ضلعاً من مربع $\alpha \gamma$ وفي النقطة δ والمركز
ارسم القاطع $\delta \gamma$ فيكون $\delta \gamma = \alpha \gamma$ $\alpha \delta$ $\alpha \gamma$ $\alpha \delta$ $\alpha \gamma$ $\alpha \delta$ $\alpha \gamma$
اولاً فضله ضلعيه يعادل $\gamma \delta$ و $\alpha \beta$
وثانياً $\delta \gamma = \alpha \delta$ (ق ٢٦ ك ٢) و $\alpha \delta = \alpha \gamma$

قضية ل . ع

علينا ان نرسم شكلاً قائم الزوايا حتى يعادل مربعاً مفروضاً ومجمعه
ضلعيه المتواليين يعادل خطاً مفروضاً

ليكن α المربع المفروض و $\beta \gamma$ مجموع ضلعي الشكل المطلوب



اجعل اب قطراً وارسم
عليه نصف دائرة وارسم دي
حتى يوازي اب واجعل اد
(اي ضلعاً من المربع المفروض)

البد منها والنقط دى فيقطع نصف الدائرة في و من ي ارم ي ف عموداً على
ا ب فهكون ا ف x ف ب الشكل المطلوب

لأن مجموعها يعدل اب ومسطحها اف x ف ب يعدل مربع في اواد
وإذا = س

تعليقة. حتى تكون هذه القضية ممكنة لا يكون ا د اطول من نصف النطر.
اي ضلع من س لا يكون اطول من نصف الخط ا ب



قضيه م.ع

علینا ان نرسم مربعاً تكون نسبتہ الی مربع مفروض کسبہ خطِ
مفروض الی خطِ آخر مفروض

ليكن اس المربع المفروض وى وف الخططين المفروضين

لیکن غ ح خطاً مستقیماً غیر معین طول و افصل منه غ ک حتی بعدل ی



وكح حتى يعدل ف وعلى غ ح

ارسم نصف دائرة وارسم كل

عموماً علی غ ح . و ا ر م ل غ م

حتى يعدل اب ارم من حتى

یوای غ ح واخرچ ل ح الی ن



۱۰۱

فلكون من يوازي غ ح فتسبة ل م : ل ن : ل غ : ل ح و ل م : ل ن : ل غ :

ل ح^٢ (ق ٢٢ ك ٦) ول غ ح مثلك قائم الزاوية فنتسب ل غ^٢ : ل ح^٢ :: غ ك^٢ :

ك ح فائلا ل م : ل ن : غ ك : ك ح وقد فُضِرت غ ك = ي وك ح = ق

ولم - اب فالمرع علم اب : المرع علم ان تي : ف

قضية ن. ع

علينا ان نقسم مثلثا الى قسمين بخط من احدى زواياه حتى تكون
نسبة قسم الى آخر كنسبة خط مثل م الى خط مثل ن

اقسم ب س الى قسمين ب د و س ب مناسبين للخطين م ون وارسم ا د فيقسم
المثلث حسب المفروض لان المثلثات التي
لها علو واحد بعضها الى بعض كفوا عدها
بعضها الى بعض فلنا اب د : ا د س ::
ب د : س د :: م : ن



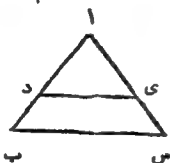
تعلية . يمكن انقسام مثلث الى اجزاء كثيرة مناسبة لخطوط مفروضة وذلك
بانقسام القاعدة على التناسب المفروض



قضية س. ع

علينا ان نقسم مثلثا الى قسمين بخط يوازي احد اضلاعه حتى تكون
نسبة قسم الى آخر كنسبة خط مستقيم م الى خط مستقيم ن

اجعل اب : ا د :: م : ن + ن . ارسم د ي حتى يوازي ب س فقد انقسم المثلث
حسب المفروض

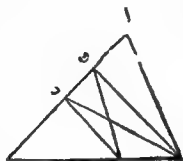


لان المثلثين اب س ا د ي متشابهان و اب س
: ا د ي :: اب : ا د ولكن م : ن + ن :: اب : ا د
فيكون اب س : ا د ي :: م : ن + ن فاذا ب د ي
: ا د ي :: م : ن

قضية ع. ع

علينا ان نقسم مثلثا مفروضا الى قسمين بخط مستقيم من نقطة مفروضة
في احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى آخر كنسبة خط مستقيم م
الى خط مستقيم ن .

ليكن $اب$ س المثلث المفروض ون النقطة المفروضة . ارسم $ن$ س واقسم $اب$ في $د$ حتى يكون $اد : دب :: ن : ن$. وارسم $دي$ حتى يوازي $ن$ س وارسم $ني$ فالحظن $ني$ يقسم المثلث حسب المفروض



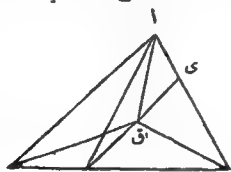
ارسم $س د$. فلأن $دي$ ن س متوازيان فالمثلثان

$ن د ي$ س $دي$ متساويان . اضع الى كل واحد $س ي$ ب منها المثلث $دي ب$ فالمثلث $ن ي ب = د س ب$. فاذا طرح كل واحد من المثلث $اب$ س يبقى الشكل ذو الاضلاع الاربعة $اس ي ن$ وهو يعدل المثلث $اس د$ واس $د : د س ب :: اد : دب :: ن : ن$ فيكون $اس ي ن : ن ي ب :: ن : ن$ تعلية . على هذا الاسلوب ينقسم مثلث الى اجزاء كثيرة متساوية بخطوط من نقطة مفروضة في احد اضلاعه . لانه اذا انقسم $اب$ الى اجزاء متساوية ورسم من نقط الانقسام خطوط توازي $ن$ س فانها تقطع $ب س$ واس ومن هذه نقط التقاطع اذا رسمت خطوط الى $ن$ تقسم المثلث الى الاقسام المطلوبة

قضية ف . ع

علينا ان نقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط مستقيمة من زواياه الى نقطة واحدة داخله

اجعل $ب د$ ثلث $ب س$ وارسم $دي$ حتى يوازي الضلع الذي يلي $ب د$.



نصف $دي$ في $ق$ ومن $ق$ ارسم المخطوط المستقيمة $ق ا$ $ق ب$ $ق س$ فقد انقسم المثلث حسب المفروض

ارسم $دا$. فليكون $ب د$ ثلث $ب س$ فالمثلث $اب د$ هو ثلث المثلث $اب س$.

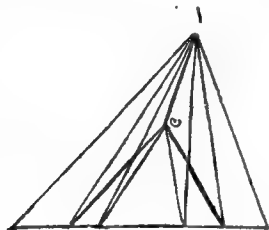
واب $د = اب ق$ ($ق ٢٧ ك ١$) فاذا $اب ق$ هو ثلث $اب س$. ولأن $د ق = ق ي$ فالمثلث $ب د ق = اق ي$ وكذلك $س د ق = س ق ي$ فالكل $ب ق س$ يعدل الكل $اق س$ وقد تبهر ان $اب ق$ يعدل ثلث $اب س$ فكل واحد من المثلثات

ا ب ق ب ق س س ق ا يعدل ثلث ا ب س

قضيه ص . ع

علينا ان نقسم مثلثا الى ثلاثة اقسام متساوية بخطوط من نقطة
بفروضة داخله

اقسم ب س الى ثلاثة اقسام متساوية في د وى وارسم د ن ي ن . ارسم ايضا
ا ف حتى يوازي د ن وارسم ا غ حتى
يوازي ي ن . فاذا رُسمت ن ف ن غ
ن ا ينقسم المثلث حسب المفروض

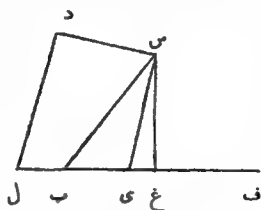


ارسم ا د اى . فلكون ا ف و ن د
متوازيين فالمثلث ا ف ن = ا ف د فاذا
أضيف اليها المثلث ا ب ف يحدث

الشكل ا ب ف ن ذو الاربعة اضلاع الذي يعدل المثلث ا ب د ولكن ب د
انما هو ثلث ب س فالمثلث ا ب د هو ثلث ا ب س فالشكل ا ب ف ن هو ثلث
المثلث ا ب س . ولأن ا غ يوازي ن ي فالمثلث ا غ ن = ا غ ي . اضف اليها
ا س غ فالشكل ا س غ ن يعدل المثلث ا س ي الذي هو ثلث ا ب س فالشكل
ا س غ ن ثلث ا ب س فكل واحد من الاشكال الثلاثة ا ب ف ن ا س غ ن
ن ف غ يعدل ثلث ا ب س

قضيه ق . ع

علينا ان نقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من احدى
زواياه حتى تكون نسبة قسم الى آخر كسبة خط م الى خط ن
ارسم س ي عموداً على ا ب وارسم شكلاً ذا زوايا قائمة حتى يعدل الشكل

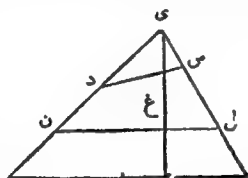


المفروض وليكن س ي ضلعاً من اضلاع
وى ف ضلعاً آخر من اضلاع واقسم
ى ف في غ حتى تكون نسبة م : ن :: غ : ف
ى غ . اجعل ب ل يعدل مضاعف
ى غ وارسم ل س . فقد انقسم الشكل
حسب المفروض

لان المثلث س ب ل يعدل س ي ل ى غ . فنسبة القائم الزوايا س ي ل
غ ف : س ب ل :: غ ف : ى غ . ولكن س ي ل ى غ ف = الشكل دل ونسبة
غ ف : ى غ :: م : ن فانما دل : س ل ب :: م : ن

قضيه ر.ع

علينا ان نقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط يوازي احد
اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى آخر كنسبة خط م الى خط ن
ليكن ا ب س د الشكل . اخرج ا د و ب س حتى يلتقيا في ى وارسم ى ف
عموداً على ا ب ونصفه في غ وعلى غ ف ارسم شكلاً قائم الزوايا حتى يعدل المثلث



ى د س وليكن ح ب ضلعاً آخر من هذا
الشكل . اقم اح في ك حتى تكون
نسبة اك : ك ح :: م : ن واجعل ى ا :
ى ن :: اب : ك ب . ارسم ن ل حتى

يوازي ا ب فيقسم الشكل حسب ب ج ف ك ا
المفروض . لان المثلثين ى ا ب ى ن ل متشابهان تكون نسبة ى ا ب : ى ن ل ::
ى ا : ى ن وبالمفروض ى ا : ى ن :: اب : ك ب فتكون نسبة ى ا ب :
ى ن ل :: اب : ك ب :: اب : ك ب :: ى غ ف : ك ب :: ى غ ف : ك ب :: ى غ ف : ك ب =
اب ى غ ف فانما ى ن ل = ك ب ى غ ف واك ى غ ف = ال . ولكن اح ى غ ف
غ ف = اس فانما ك ح ى غ ف = ن س واك ى غ ف = ك ح ى غ ف : ك ح :: ك ح : ك ح

واك:كح:م:ن فاذا ال:ن س:م:ن

قضیة ش . ع

علينا ان نقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع الى قسمين بخط من نقطة في
 احد اضلاعه حتى تكون نسبة قسم الى آخر كنسبة خط م الى خط ن
 ارم ٥ وان عليه شكلاً قائم الزوايا يعدل الشكل المفروض وليكن د ك

ارسم د وان عليه شكلاً قائم الزوايا يعدل الشكل المفروض وليكن دك
ضلعاً الاخر. اقسام دك في ل حتى تكون
نسبة دل : ل ك :: م : ن . واجعل دق
يعدل ٢ دل . واجعل ق غ يعدل العمود
ان وارسم غ ٢ حتى يوازي د ه وارسم ٢ ه
فينقسم الشكل حسب المفروض

أرسم العمود ٢٠ فالشكل ٥ د د ك
 = اس و د د ق = د د ان + د د

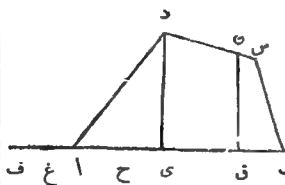
٣٠ اي د د خ د ق ي عدل مضاعف مجنح ب
المثلثين ا ه د د د ٢ . فلان دل نصف د ق فانه

٣ فاذا $x \vdash k =$ سب ٢. ولكن $x \vdash d : x \vdash k$ دل :
ل ك : م : ت فاذا ا ه د : سب ٢ م : ت

قضیة ت. ع

علينا ان نقسم شكلاً ذا اربعة اضلاع بخط عمودي على احد اضلاعه
حتى تكون نسبة قسم الى آخر كنسبة خط م الى خط ن

ليكن ا ب س د الشكل المفروض المطلوب انقسامه على نسبة م: ن بخط



عمودي على الضلع اب

ارسم المخطط دي عموداً على اب

وان عليه شكلاً قائم الزوايا دي X

ي ف حتى يعدل الشكل اب س د

واقسم في في غ حتى تكون نسبة ب ق

ف غ : غ : ي :: م : ت . نصف اى في ح واقسم الشكل ذا الاربعة الاضلاع ي س

الى قسمين بالمخطط ن ق الذي يوازي دي حتى تكون نسبة احدها الى الاخر كنسبة

ف غ : غ : ح . فالمخطط ن ق يقسم الشكل اس حسب المفروض

لان دي X ي ف = اس و دي X ح = داى فاذا دي X ح ف =

ي س فالشكل ي س قد انقسم على نمبة انقسام ف ح قاعدة القائم الزوايا الذي

يعدله فاذا ق س = دي X ف غ و ن = دي X غ ح وان = دي X غ ي

فنمبة ق س : ان :: ف غ : غ : ي :: م : ت



اصول الهندسة

مضافات

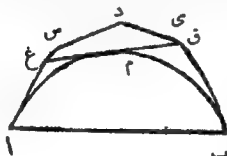
الكتاب الاول

في تريع الدائرة

سابقة

كل خطٍ مثنيًا كان او مركبًا من خطوطٍ مستقيمة محيطٍ بخطٍ محدبٍ
هو اطول من الخطِ المحاط به

ليكن ا م ب الخط المحاط به هو اقصر من الخط ا غ د ب المحيط به
فان لم يكن ا م ب اقصر من كل خطٍ محيط به فبالضرورة يوجد بين الخطوط
المحيطة خط اقصر من البقية واقصر من ا م ب
او بمائلة . ليكن ا س د ي ب هذا الخط .
ارسم بين الخط المحيط والمحاط به خطًا آخر
مستقيمًا لا يلاقي الخط ا م ب او يمس فقط مثل ب



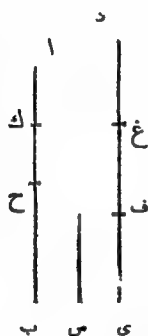
الخط غ ق . فالخط غ ق انما هو اقصر من الخط غ س د ي ق . فاذا وضع غ ق
عوض س د ي ق يكون ا غ ق ب اقصر من ا غ د ق ب وقد فرض ان هذا
الاخير هو اقصر جميع الخطوط المحيطة فذلك محال فكل خط محيط بالخط ا م ب هو
اطول منه

فرع اول . محيط شكل كثير الاضلاع في دائرة هو اقصر من محيط الدائرة

فرع ثانٍ. اذا رُسم من نقطة مفروضة خطان مستقيمان بمسّان دائرة فمجموعهما هو اطول من القوس المقطوع بهما فمحيط شكل كثير الاضلاع يحيط بدائرة هو اطول من محيط الدائرة

القضية الاولى . ن

اذا فرض مقداران غير متساويين وطُرح من اكبرها نصفه ومن الباقي نصفه الى آخره يبقى اخيراً مقدار اصغر من اصغر المقدارين المفروضين لكن اب اكبر مقدارين وس اصغرها . فاذا طرح من اب نصفه ومن الباقي نصفه الى آخره يبقى اخيراً مقدار اصغر من س



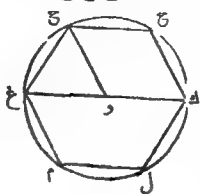
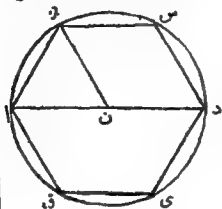
لانه قد يمكن ان يتكرر س حتى يصير اكبر من اب . فليكن دى مضروباً للمقدار س اكبر من اب وليكن فيه الاقسام د ف ف غ غ ي وكل قسم فليعدل س . اطرح من اب نصفه ب ح ومن اح اطرح نصفه ك وكّرر العمل حتى ان اقسام اب تماثل اقسام دى عددًا اي اك ح ك ح ب . فلكون دى اعظم من اب والقسم ي غ المطروح من دى ليس هو نصف دى ولكن ح ب القسم المطروح من اب هو نصفه الباقي غ د هو اكبر من الباقي اح . ولكون

غ د اكبر من ح ا والقسم غ ف ليس اكثر من نصف د غ والقسم ح ك هو نصف اك فالباقي ف د اعظم من الباقي اك ولكن ف د يعدل س فاذا س اكبر من اك او اك انما هو اصغر من س

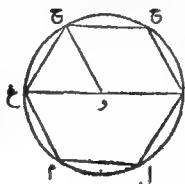
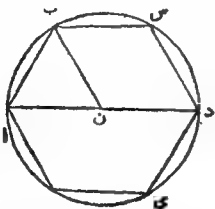
القضية الثانية . ن

اشكال كثيرة الاضلاع المتساوية ومماثلة في عدد اضلاعها ومرسومة في دوائر هي متشابهة ونسبة بعضها الى بعض كنسبة مربعات اقطار الدوائر التي رُسمت فيها .

ليكن ا ب س د ي ق و غ ح ج ك ل م شكلين اضلاعها كثيرة متساوية وليكونا متماثلين في عدد اضلاعها ومرسومين في دائرتين ا د ب غ ح ك فهما متشابهان ونسبة ا ب س د ي ق الى غ ح ج ك ل م كنسبة مربع قطر الدائرة ا ب د الى مربع قطر الدائرة غ ح ك



استعملن وو مركزي الدائرتين وارسم ان و غ و وأخرجهما حتى يلاقيا المحيطين في د و ك. ارسم ب ن و ح و. فليكون الخطوط المستقيمة ا ب ب س س د د ي ي ق ق ا متساوية فالاقواس التي تقابلها ايضا متساوية (ق ٢٨ ك ٣) ولذلك الاقواس غ ح ج ج ك ك ل ل م م غ هي متساوية ايضا وهي تماثل اقواس الدائرة الاخرى عدداً فاي جزء كان القوس ا ب من المحيط ا ب د كان القوس غ ح ذات ذلك الجزء من المحيط غ ح ك. والزوايا ان ب ذات الجزء من اربع زوايا قائمة الذي كان القوس ا ب من المحيط ا ب د (ق ٢٣ ك ٦) والزوايا غ و ح هي من اربع زوايا قائمة ما كان القوس غ ح من المحيط غ ح ك (ق ٢٣ ك ٦) فالزوايا ان ب غ و ح هـا جزءان متساويان كل واحد من اربع زوايا قائمة فهما متساويان. والمثلثان المتساويا الساقين ان ب غ و ح هـا متساويا الزوايا ايضا والزوايا ا ب ن تعدل الزاوية غ ح و. وعلى هذا الاسلوب اذا رسم ن س و ج



يبرهن ان الزاوية ن ب س تعدل و ح ج. فالكمل ا ب س يعدل الكل غ ح ج. وهكذا يبرهن في

بقية زوايا الشكلين فهما متساويا الزوايا. وقد فرض انها متساويا الاضلاع. فالاضلاع

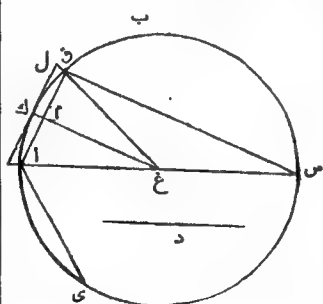
غ ك. ثم في المثلثين ك غ ل ك غ ن الضلع غ ل = غ ن و غ ك مشترك بينهما
والزاوية ل غ ك تعدل ك غ ن فالقاعدة ك ل = ك ن (ق ٤ ك ١) والمثلث ك غ ن
متساوي الساقين فالزاوية غ ك ن = غ ن ك والزاويتان غ م ك غ م ن قائمتان
فالمثلثان غ م ك غ م ن متساويان (ق ٢٦ ك ١) والضلع ك م = م ن فقد تنصف
ك ن في م وك ن = ك ل فإذا ك م = ك ح والضلع غ ك مشترك بين المثلثين غ ك م
غ ك ح والزاوية غ ك ح = غ ك م فالضلع غ م = غ ح (ق ٤ ك ١) فالنقطة م هي
في محيط الدائرة ولكون ك م غ قائمة فالخط ك م مماس الدائرة. وهكذا اذا رُسمت
خطوط مستقيمة من المركز الى بقية زوايا الشكل في الدائرة يرسم شكل محيط بالدائرة
اضلاعه تعدل ك ل وعدد الاضلاع ياتل اضلاع الشكل في الدائرة
فرع اول. اذا جعل غ مركزاً و غ ل او غ ك او غ ن نصف قطر ورُسمت
دائرة فالشكل يقع في تلك الدائرة وبشبه ا ب س دى ق

فرع ثان. نسبة ا ب : ك ل :: العمود من غ على ا ب : العمود من غ على ك ل
اي : نصف قطر الدائرة فيمحيط الشكل في الدائرة : محيط الشكل المحيط بالدائرة ::
العمود من المركز على ضلع من اضلاع الشكل في الدائرة : نصف قطر الدائرة

— ١٠٨ —

القضية الرابعة . ن

اذا فُرِضَتْ دائرة فقد يمكن ان يوجد شكلان متشابهان اضلاعهما كثيرة
احدهما في الدائرة والاخر محيط بها وفضلتها اقل من مساحة مفروضة



ليكن ا ب س الدائرة
المفروضة ومربع د مساحة مفروضة
فقد يمكن ان يرسم شكل كثير
الاضلاع في ا ب س وآخر يشبهه
محيطاً بها وتكون فضلة الشكلين اقل
من مربع د

ارسم في الدائرة ا ب س
الخط المستقيم اى حتى يعادل د .

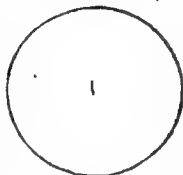
وليكن ا ب ريع محيط الدائرة . من ا ب اطرح نصفه ومن الباقي نصفه وهكذا حتى يبقى ا ق اقل من القوس ا ي (ق ا ك مضافات) استعمل المركز غ و ا رسم القطر ا س والمطين المستقيمين ا ق ق غ . نصف القوس ا ق في ك وارسم ك غ وارسم ح ل حتى يمس الدائرة في ك ويلتقي غ ا غ ق بعد اخراجها في ح ول وارسم س ق

المثلثان ح غ ل ا غ ق متساويا الساقين والزاوية ا غ ق مشتركة بينهما فهما متساويا الزوايا (ق ٦ ك ٦) والزوايتان ح ل غ ا ق متساويتان . ولكن الزاوية غ ك ح = س ق لانها قائمتان . فالمثلثان ح غ ك ا س ق متساويا الزوايا (فرع ٤ ق ٢٢ ك ١) وقد استعملت القوس ا ق بتصفيف القوس ا ب ثم بتصفيف النصف الى اخره فالقوس ا ق تعدد مراراً معلومة في القوس ا ب فتتعدد ايضاً في محيط الدائرة ا ب س مراراً معلومة فيكون الخط المستقيم ا ق ضلع شكل كبير الاضلاع المتساوية في الدائرة ا ب س ويكون ح ل ضلع شكل مثله محيط بالدائرة ا ب س (ق ٢ ك ١ مضافات) . ليكن عن الشكل في الدائرة بحرف مثل ن وعن الشكل المحيط بها بحرف مثل م . فلكون هذين الشكلين متشابهين تكون نسبة احدهما الى الآخر كمرابي الضلعين المتشابهين ح ل و ا ق (فرع ٣ ق ٢٠ ك ٦) اي (لكون المثلثين ح ل غ ا ق غ متشابهين) كنسبة مربع ح غ الى مربع ا غ الذي يعدل مربع غ ك . وقد تبين ان المثلثين ح غ ك ا س ق متشابهان . فتكون نسبة ا س : س ق :: الشكل م : الشكل ن . وبالطرح مربع ا س : زبادتو على مربع س ق اي مربع ا ق (ق ٤٧ ك ١) :: الشكل م : زبادتو على الشكل ن . ولكن مربع ا س اي المربع المحيط بالدائرة ا ب س هو اعظم من شكل ذي ثمانية اضلاع متساوية محيط بالدائرة لانه محيط بذلك الشكل والشكل ذو الثمانية الاضلاع اعظم من شكل ذي ستة عشر ضلعاً ومثل جراً . فمربع ا س هو اعظم من الشكل المرسوم حول الدائرة بانقسام القوس ا ب حسباً تقدم فهو اعظم من الشكل م . وقد تبين ان مربع ا س : مربع ا ق :: الشكل م : فضلة الشكلين فلكون ا س اعظم من م يكون مربع ا ق اعظم من فضلة الشكلين (ق ٤ ك ٥) فضلة الشكلين اذا هي اقل من مربع ا ق و ا ق اقصر من د . فضلة الشكلين اقل من مربع د اي من المساحة المفروضة

فرع اول . فضلة الشكلين اعظم من فضلة احدهما والدائرة . فيمكن ان يرسم شكل في دائرة او محيط بها تكون فضلة احدهما والدائرة اقل من مساحة مفروضة

مها كانت تلك المساحة صغيرة

فرع ثان. المساحة ب التي هي اكبر من كل شكل يرسم في الدائرة ا واصغر من



كل شكل يرسم محيطاً بالدائرة
تعدل الدائرة ا ولا فتكون
اكبر منها او اصغر منها ولو لا
لكن اكبر من ا بما يعدل
مساحة س . فالاشكال التي
ترسم محيطة بالدائرة ا هي

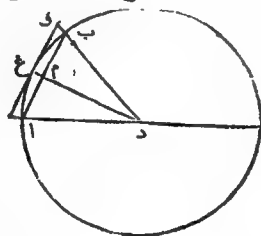
بالمفروض اكبر من د . ولكن ب اكبر من ا بمساحة س فلا يرسم شكل محيط بالدائرة
ا الا ما كان اكبر منها بما يعدل مساحة س وذلك محال . وهكذا اذا كانت ب
اصغر من ا بمساحة س بيان انه لا يمكن ان يرسم في الدائرة ا شكل الا ما كان
اصغر من ا بمساحة اكبر من س وذلك محال فلا يكون ا وب غير متساويين اي هما
متساويان



القضية الخامسة . ن

مساحة دائرة تعدل القائم الزوايا مسطح نصف قطرها في خط مستقيم
يعدل نصف محيطها

ليكن ا ب س دائرة مركزها د وقطرها ا س . فاذ اخرج ا س واخذ اح



حتى يعدل

نصف محيط

الدائرة

فمساحتها ا

تعدل القائم

الزوايا دا

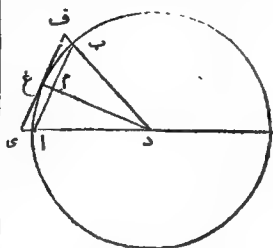
ا ح

ليكن ا ب ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية في الدائرة ا ب س . نصف

القوس ا ب في غ ومن غ ا رسم الماس ي غ ف الذي يلاقي د ا و د ب بعد اخراجها في ي غ ف . فيكون ي غ ف ضلع شكل كثير الاضلاع المتساوية محيط بالدائرة ا ب س (ق ٢ ك ١ مضافات) . اقطع من ا س بعد اخراجه ا ك حتى يعدل نصف محيط الشكل الذي كان ا ب ضلعاً من اضلاعه واقطع ايضاً ا ل حتى يعدل نصف محيط الشكل الذي كان ي غ ف ضلعاً من اضلاعه . فيكون ا ك اقصر من ا ح و ا ل اطول من ا ح (سابقة المضافات) ثم في المثلث ي د ف فد رُسم د غ عموداً على القاعدة فالمثلث ي د ف يعدل القائم الزوايا د غ في نصف ي ق (ق ١ ك ١) وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند د والتي يتركب منها الشكل المحيط بالدائرة والشكل كله يعدل القائم الزوايا د غ في ا ل الذي فُرض انه نصف محيط الشكل (ق ١ ك ٢) او يعدل د ا \times ا ل ولكن ا ل اطول من ا ح فالقائم الزوايا د ا \times ا ل اكبر من د ا \times ا ح اي القائم الزوايا د ا \times ا ح اصغر من د ا \times ا ل اي اصغر من كل شكل محيط بالدائرة ا ب س

واما المثلث ا د ب فانه يعدل القائم الزوايا د م في نصف ا ب فهو اصغر من القائم الزوايا د غ او د ا في نصف ا ب . وهكذا في جميع المثلثات التي رؤوسها عند د والتي يتركب منها الشكل في الدائرة ا ب س . فكل الشكل يعدل د ا \times ا ك لان ا ك = نصف محيط الشكل في الدائرة . والقائم الزوايا د ا \times ا ك هو اصغر من القائم الزوايا د ا \times ا ح فبالاخرى يكون الشكل الذي ا ب ضلعاً منه اصغر من د ا \times ا ح . اي د ا \times ا ح اكبر من كل شكل يمكن رسمه في الدائرة ا ب س . وقد تبين ان د ا \times ا ح اصغر من كل شكل محيط بالدائرة ا ب س فالقائم الزوايا د ا \times ا ح يعدل الدائرة ا ب س (فرع ٢ ق ٤ ك ١ مضافات) ود ا هو نصف قطر الدائرة ا ب س و ا ح نصف محيطها

فرع اول . لكون د ا : ا ح :: د ا : د ا \times ا ح (ق ٦ ك ١) وقد تبين ان د ا \times ا ح = مساحة الدائرة التي كان د ا نصف قطرها فنسبة نصف قطر دائرة : نصفه محيطها او القطر كلو الى المحيط كلو :: مربع نصف القطر : مساحة الدائرة



فرع ثانٍ .
يمكن ان
يرسم شكل
كثير
الاضلاع
المتساوية
محيط بدائرة

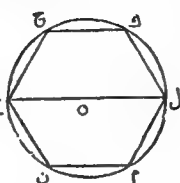
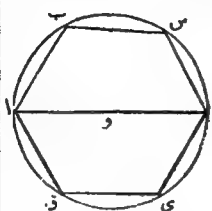
حتى تكون فضلة محيطه ومحيط الدائرة اقل من خط مفروض . يمكن ان ق الخط
المفروض . اقطع منه ن ر اقل من نصفه واقل من ا د . ويرسم شكل محيط بالدائرة
ا ب س حتى تكون فضلة الشكل والدائرة اقل من مربع ن ر (فرع اول ق ٤ ك ا
مضافات) ويمكن ي ف ضلع هذا الشكل . فقد نبرهن ان الدائرة تعدل د ا \times ا ح
والشكل المحيط بعدل د ا \times ا ل فضلة الشكل والدائرة تعدل د ا \times ح ل فالتايم
الزوايا د ا \times ح ل اصغر من مربع ن ر . ولان د ا اطول من ن ر يكون ح ل
اقصر من ن ر ومضاعف ح ل اقصر من مضاعف ن ر وبالاخرى مضاعف ح ل
اقصر من ن ق . ولكن ح ل هو فضلة نصف محيط الشكل الذي كان ي ف ضلعاً
منه ونصف محيط الدائرة . فمضاعف ح ل هو فضلة كل محيط الشكل وكل محيط
الدائرة (ق ه ك ه) فضلة محيط الشكل ومحيط الدائرة في اقل من الخط المفروض
ن ق

فرع ثالث . يمكن ان يرسم شكل كثير الاضلاع المتساوية في دائرة حتى تكون
فضلة محيط الدائرة ومحيطه اقل من خط مفروض

القضية السادسة . ن

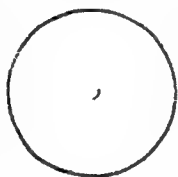
نسبة مساحات الدوائر بعضها الى بعض هي كنسبة مربعات اقطارها
بعضها الى بعض

ليكن ا ب د غ ح ل دائرتين . فمساحة الدائرة ا ب د الى مساحة الدائرة



غ ح ل ك مربع القطر
اد الى مربع القطر
غ ل
ليكن

ا ب س د ي ق
وغ ح ك ل م ن



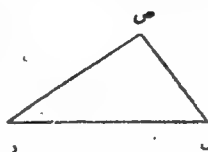
شككين متشابهين لما اضلاع كثيرة في الدائرتين وليكن ر
مساحة ما وليكن نسبة مربع ا د الى مربع غ ل كالدائرة
ا ب د الى ر . فليكون الشكلين ا ب س د ي ق
غ ح ك ل م ن متشابهين فنسبة مساحة احدهما الى
مساحة الاخر ك مربع قطر دائرة الواط الى مربع قطر

دائرة الاخر (ق ٢ ك ا مضافات) فنسبة ا د : غ ل :: الشكل ا ب س د ي ق :
الشكل غ ح ك ل م ن . ولكن ا د : غ ل :: اللثة ا ب د ر . فالشكل
ا ب س د ي ق : الشكل غ ح ك ل م ن :: ا ب د ر . واللثة ا ب د <
ا ب س د ي ق فتكون ر < غ ح ك ل م ن (ق ١٤ ك ه) اي ر اكبر من كل
شكل مرسوم في الدائرة غ ح ل

وهكذا يبرهن ان ر اصغر من كل شكل يرسم حول اللثة غ ح ل فاذا ر =
الدائرة غ ح ل (فرع ٢ ق ٤ ك ا مضافات) وقد فرض ان ا ب د ر :: ا د :
غ ل فتكون ا ب د : غ ح ل :: ا د : غ ل
فرع اول . نسبة محيطات الدوائر بعضها الى بعض كنسبة اقطارها بعضها الى
بعض

لنفرض ان الخط المستقيم ك = نصف محيط الدائرة ا ب د والخط المستقيم
ي = نصف محيط اللثة غ ح ل . فالقائم الزوايا ا و خ ك = ا ب د و غ ه خ ي =
غ ح ل (ق ه ك ا مضافات) فنسبة _____ ك
او خ ك : غ ه خ ي :: ا د : غ ل ::
او غ ه : وبالمبادلة او خ ك : او غ ه :: غ ه خ ي : غ ه . ولاشكال القائمة الزوايا اذا

كانت على طرف واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض
(ق ١ ك ٦) فنسبة ك: ا و هـ: غ وبالمبادلة ك: هـ و غ: ا فاذا تضاعف
كل واحد تكون نسبة المحيط ا ب د: المحيط غ ح ل: القطر ا د: القطر غ ل
فرع ثان. الدائرة المرسومة على الضلع الذي يقابل القائمة في مثلث ذي قائمة



تعدل الدائرتين المرسومتين على الضلعين
الاخرين . لان نسبة الدائرة على ص ر:
الدائرة على ر ف: مربع ص ر: مربع ر ف .
والدائرة على ف ص: الدائرة على ر ف: مربع

ف ص: مربع ر ف . فالدائرتان على ص ر و ص ف: الدائرة على ف ر: مربع
ص ر و ص ف: مربع ر ف (ق ٢٤ ك ٥) ولكن مربعاً ص ر ص ف يعدلان
مربع ر ف (ق ٤٧ ك ١) فالدائرتان على ص ر و ص ف يعدلان الدائرة على ر ف

—KOF—

القضية السابعة. ن.

اشكال متوازية الاضلاع ومتساوية الزوايا تكون نسبة بعضها الى
بعض كنسبة مسطح الاعداد التي تناسب اضلاعها بعضها الى بعض
ليكن اس ود ف شكلين متوازي الاضلاع متساوي الزوايا . وليكن م ن



ف ق اربعة اعداد وليكن ف
نسبة ا ب: ب س: م: ن
ونسبة ا ب: د ي: م: ف
ونسبة ا ب: ي ف: م: ق
فبالمساواة نسبة ب س: ي ف: ن: ق . فالشكل
اس: د ف: م: ن: ف ق

ليكن ن ف مسطح ن في ف . ونسبة م ن الى ف ق تتركب من نسب م ن الى
ن ف ون ف الى ف ق (ن ح د: ا ك ٥) . ولكن نسبة م ن الى ن ف هي نسبة م الى
ف (ق ١٥ ك ٥) لان م ن ون ف مضروبان متساويان من م وف . ولهذا الیهبت
ايضاً نسبة ن ف الى ف ق هي نسبة ن الى ق فنسبة م ن الى ف ق قد تركبت من

نسبة م الى ف ونسبة ن الى ق . وبالمفروض نسبة م الى ف هي نسبة الضلع ب س الى الضلع دى . ونسبة ن الى ق هي نسبة الضلع ب س الى الضلع دى ق فنسبة م الى ف ق قد تركبت من نسبة ا ب الى دى ونسبة ب س الى دى ف . ونسبة الشكل اس الى الشكل د ف قد تركبت من هذه النسب ايضا (ق ٢٢ ك ٦) فالشكل اس الى الشكل ا د كسبة م من مسطح العددين م ون الى ف ق مسطح العددين ف وق
 فرع اول . اذا كانت نسبة غ ح الى كل كسبة م الى ح — غ
 من فالمرجع المرسوم على غ ح الى المربع على كل كسبة م م ل — ك
 او مربع م الى ن ن او مربع ن

فرع ثان . اذا فرضت خطوط مثل ا ب س د الى اخره واعلاد متناسبة لها مثل م ن ر ص اي ا ب : م : ن : و ا : س : م : ر و ا : د : م : ص . فاذا كان القائم الزوايا مسطح خطين من هذه المخطوط يعدل مربع الخط الثالث فسطح العددين المناسبين للاولين يعدل مربع العدد المناسب للثالث اي اذا كان $X \propto S$
 $= B^2$ فيجتزئ $X = R = N \propto N$
 وبالعكس اذا فرض م ور عددين مناسبين للخطين ا وس وفرض ان $X \propto S =$
 B^2 ووُجد عدد مثل ن حتى ان $N^2 = M$ فيجتزئ ا ب : م : ن

تعلية . لكي نجد اعدادا مناسبة لعدة مفادير من جنس واحد لنفرض ان احدها قد انقسم الى اجزاء متساوية ولنفرض م عدد الاجزاء كلها وح جزءا من الاجزاء . ولنفرض ان ح يوجد ن مرة في المقنار ب و ر مرة في المقنار س و ص مرة في المقنار د و هـ جزءا الى اخره . فالامر واضح ان الاعلاد م ن ر ص هي مناسبة للمقادير ا ب س د . فاذا قيل في القضايا الآتية ان خطا مثل ا = عددا مثل م يراد ان ا = م X ح اي ان ا يعدل المقنار المفروض ح مضروبا في م وهكذا في المقادير الاخرى ب س د والاعلاد المناسبة لها لان ح انما هو قياس مشترك للكل . وقد يترك ذكر هذا القياس المشترك للاختصار ولكنه متضمن في المعنى كلما قيل ان خطا او مقنارا هندسيا يعدل عددا ما . واذا كان في ذلك العدد كسرا او كان مختلافا يراد ان القياس المشترك ح قد انقسم الى اجزاء بدّل عليها بالكسر . فلو قيل ا = ٢٧٥ ٢٦٠ يراد انه يوجد مقنار ح حتى ان $٢٦٠ = ٢٧٥ \times ح$ وهكذا

بين القطر وفضلة نصف القطر والعمود على وتر قوس مضاعف القوس د ب

— ١٠٠٤ —

القضية التاسعة . ن

محيط الدائرة هو اطول من ثلاثة امثال قطرها بخط أقصر من $\frac{1}{7}$ من

القطر واطول من $\frac{1}{11}$ من القطر

ليكن ا ب د دائرة مركزها س وقطرها ا ب فالمحيط اطول من ا ب بخط

اقصر من $\frac{1}{7}$ او $\frac{1}{11}$ من ا ب واطول

من $\frac{1}{11}$ من ا ب

ارسم في الدائرة ا د ب المخط

المستقيم ب د حتى يعدل نصف القطر ب

ب س (ق ا ك ٤) ارسم د ق عموداً

على ب س واخرجه حتى يلاقي المحيط

ايضاً في ي وارسم س ج عموداً على

ب د . اخرج ب س الى ا ونصف اس في ح وارسم س د

فالامر واضح ان كل واحدة من القوسين ب د ب ي هي سدس المحيط (فرع

ق ا ك ٤) فالقوس د ب ي ثلث المحيط . فالخط س ج متناسب متوسط بين ا ح

ربع القطر والمحيط ا ق (ق ا ك ٨ مضافات) . ولكون الضلعين ب د د س

متساويين فالزاويتان د س ق د ب ق متساويتان . وود ق س د ق ب متساويتان

ايضاً والضلع د ق مشترك بين المثلثين د ب ق د س ق فالقاعدة ب ق تعدل

القاعدة س ق فقد تنصف س ب في ق فاذا فرض ان اس او ب س = ١٠٠٠

فحينئذ ا ح = ٥٠٠ وس ق = ٥٠٠ وا ق = ١٥٠٠ وس ج متناسب متوسط بين

ا ح وا ق اي س ج = ا ح × ا ق (ق ا ك ١٧) = ١٥٠٠ × ٥٠٠ = ٧٥٠٠٠٠

وس ج = ٨٦٦٢٠٢٥٤ لان (٨٦٦٢٠٢٥٤) اقل من ٧٥٠٠٠٠ وايضاً اس

+ س ج = ٨٦٦٢٠٢٥٤ +

ولكون س ج عموداً من المركز س على وتر سدس المحيط فاذا فرض ف =

العمود من س وتر $\frac{1}{11}$ من المحيط يكون ف متناسباً متوسطاً بين ا ح و اس + س ج

(ق ٨ ك ا مضافات) وف' = اح × (اس + س ج) = (٥٠٠ + ٢٠٥٤) ×

(١٨٦٦) = ١٢٢٧ + ١٢٣٠ وى = ١٦٥٨ + ١٦٥٨ واس + ف = ١٢٥٨ +

١٦٦٥

ثم اذا فرض ر = العمود من س على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط فمختلر يكون ر متناسبا

متوسطا بين اح واس + ف ور' = اح × (اس + ف) = (٥٠٠ + ١٢٥٨) ×

(١٦٦٥) = ١٨٢٩٦٢٢٩ + ور = ١٦١٤٤٤٩ + واس + ر = ١٦٤٤٩ +

١٦٩١

ثم اذا فرض ص = العمود من س على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط فمختلر ص' = اح ×

(اس + ر) = (٥٠٠ + ١٦٩١٤٤٤٩ + ١٦٥٨) × ١٦٥٨ = ١٦٥٨ +

١٦٩٧٤٨٥٨٩ + ص = ١٦٩٧٤٨٥٨٩ +

اخيرا اذا فرض ط = العمود من س على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط فمختلر ط' = اح ×

(اس + ص) = (٥٠٠ + ١٦٩٧٤٨٥٨٩ + ١٦٥٨) × ١٦٩٧٤٨٥٨٩ + و ط =

١٦٩٧٤٦٤٥٨ + اي اذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ جزء فالعمود من المركز

على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط هو اطول من ١٦٩٧٤٦٤٥٨ من تلك الاجزاء

ولكن حسب النضية السابقة وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط هو متناسب متوسط بين

المحيط وفضلة نصف القطر و ص اي العمود من المركز على وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط . فربع

وتر $\frac{1}{2}$ من المحيط = اب × (اس - ص) = (٢٠٠ - ٢٠٥٤) × ٢٠٠ = ٢٠٥٤ - ٢٠

٤٢٨٢ والوتر ذاته = ٦٥٤٢٨٦ - لان (٦٥٤٢٨٦) أكثر من ٤٢٨٢

ووتر $\frac{1}{2}$ من المحيط او ضلع شكل متساوي الاضلاع ذي ٦٦ ضلعاً في الدائرة اذا

كان ٦٥٤٢٨٦ - يكون محيط ذلك الشكل (٦٥٤٢٨٦) × ٦٦ =

٦٢٨٢٤١٠٥٦ -

ليكن م محيط شكل يشبه المتقدم ذكره محيطاً بالدائرة ثم (فرع ٢ ك ه

مضافات) ط : اس :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ - م ولكن ط = ١٦٩٧٤٦٤٥٨ + م

فلما + ١٦٩٧٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ - م فاذا فرض مقدار

آخرن حتى تكون نسبة ١٦٩٧٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ - م

فاذا (ق ٢٣ ك ه) + ١٦٩٧٤٦٤٥٨ : ١٦٩٧٤٦٤٥٨ :: م ولكن الاول

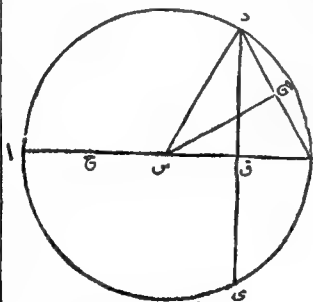
أكبر من الثاني فالثالث أكبر من الرابع اي ن < م فاذا استعمل متناسب رابع لهذه

الاعلاد ٩٩٩٤٦٤٥٨ و ١٠٠٠ و ٦٢٨٢٤١٠٥٦ و ٦٢٨٥٤٦١ - فلنا
 ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٥٤٦١ وحمبا تقدر
 ٩٩٩٤٦٤٥٨ : ١٠٠٠ :: ٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٥٤٦١ فلنا ايضا

٦٢٨٢٤١٠٥٦ : ٦٢٨٢٤١٠٥٦ :: ٦٢٨٥٤٦١ : ٦٢٨٥٤٦١ ن . ولان الاول
 اكبر من الثاني فالثالث اكبر من الرابع اي - ٦٢٨٥٤٦١ < ن . وقد نبرهن
 ان ن < م فاذا ٦٢٨٥٤٦١ اكبر من م محيط الشكل المحيط بالدائرة ذب
 الستة والتسعين ضلعاً اي محيط ذلك الشكل هو اقل من ٦٢٨٥٤٦١ ومحيط
 الدائرة اقل من محيط الشكل ذي الاضلاع الكثيرة المحيط بها فبالبحري محيط الدائرة
 اقل من ٦٢٨٥٤٦١ فاذا انقسم نصف القطر الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اقل
 من ٦٢٨٥٤٦١ من تلك الاقسام فيين المحيط والقطر تناسب (ق ٨ كه)
 من تناسب ٦٢٨٥٤٦١ الى ٢٠٠٠ او من تناسب ٢١٤٢٤٧٣٠٥ الى ١٠٠٠
 ولكن تناسب ٢٢ الى ٧ هو اعظم من تناسب ٢١٤٢٤٧٣٠٥ الى ١٠٠٠ اي اذا
 انقسم القطر الى سبعة اقسام يكون المحيط اقل من ٢٢ قسماً منها

بقي علينا ان نبرهن ان زيادة المحيط على القطر في اكثر من $\frac{1}{71}$ من القطر
 قد نبرهن سابقاً ان س ج = ٧٥٠٠٠٠ وس ج = - ٨٦٦٤٠٢٥٤٥ فاذا
 اس + س ج = ١٨٦٦٤٠٢٥٤٥ . ليكن ف كما تقدم عموداً من المركز على وتر
 من المحيط فلنا

ف = ا ح × (اس + س ج) = ٥٠٠ × (١٨٦٦٤٠٢٥٤٥ -) =
 ٩٢٢٠١٢٤٧٣ وف = ٩٢٥٨٥٠٢٦٥ واس + ف = - ١٩٦٥٤٩٢٥٨٥



ثم ليكن ر العمود من المركز
 على وتر $\frac{1}{71}$ من المحيط فلنا ر =

ا ح (اس + ف) = ٥٠٠ ×

(- ١٩٦٥٤٩٢٥٨٥) =

٩٨٢٩٦٢٤٩٢ ور =

٩٩١٤٤٤٩٥ واس + ر =

١٩٩١٤٤٤٩٥

ليكن ص العمود من المركز

على وتر $\frac{1}{28}$ من المحيط فلنا ص^٢ = ا ح (ا س + ر) = ٥٠٠ × -
 ٩٩٧٢٨٥٨٩٥ = - (١٩٩١٢٤٤٤٩٥ - ٩٩٥٧٣٢٢٤٧٥) وص = -

ثم ان مربع وتر $\frac{1}{11}$ من المحيط = اب (ا س - ص) = ٢٠٠ ×
 (٢٤١٤١٠٥ +) = ٤٢٨٢٢٠١ + والوتر ذاته = ٦٥٢٤٣٧٧ + لان
 (٦٥٢٤٣٧٧) اقل من ٤٢٨٢٢٠١. واذا كان وتر $\frac{1}{11}$ من المحيط + ٦٥٢٤٣٧٧
 فمحيط شكل ذي ٩٦ ضلعاً متساوياً في الدائرة = ٩٦ × (٦٥٢٤٣٧٧ +) =
 ٦٢٨٢٢٠١٩ ومحيط الدائرة اطول من محيط الشكل فيها فاذا انقسم نصف القطر
 الى ١٠٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من ٦٢٨٢٢٠١٩ من تلك الاقسام. واذا انقسم
 نصف القطر الى ٥٠٠ قسم يكون المحيط اكثر من ٣١٤١٢٠٠٩ من تلك الاقسام
 ولكن تناسب ٣١٤١٢٠٠٩ الى ١٠٠٠ هو اعظم من تناسب $\frac{1}{7} + ٣$ الى واحد
 فناسب محيط الدائرة الى قطرها هو اعظم من تناسب $\frac{1}{7} + ٣$ الى واحد اي فصلة
 المحيط وثلاثة امثال القطر هي اكثر من $\frac{1}{7}$ من القطر وقد تبهرن انها اقل من $\frac{1}{7}$ من
 القطر

فرع اول. اذا فرض قطر دائرة نستعمل المحيط هكذا ٢٢:٧ :: القطر : كمية
 رابعة اكبر من المحيط وا ٣: $\frac{1}{7}$ او ٢٢٣:٧١ :: القطر : كمية رابعة اصغر من
 المحيط

فرع ثان. $\frac{1}{7} - \frac{1}{71} = \frac{1}{497}$ ففضلة الخطين المستعملين في $\frac{1}{497}$ من القطر فضلة
 المحيط واحدهما اقل من $\frac{1}{497}$ من القطر

فرع ثالث. نسبة ٢٢:٧ :: مربع نصف القطر : مساحة الدائرة تقريباً. لانه قد
 تبهرن سابقاً (فرع اول) انه نسبة قطر دائرة الى محيطها كمربع
 نصف القطر الى مساحتها ولكن نسبة القطر الى المحيط كنسبة ٢٢:٧ تقريباً فمربع
 نصف القطر الى المساحة كذه النسبة المذكورة تقريباً

تعليقة

كلما تعددت اضلاع الشكل في الدائرة والشكل المحيط بها قلت الفضلة بينهما
 وبين احدهما والمحيط كما يرى من هذا الجدول الذي فيه حسب نصف القطر واحداً

عدد الاضلاع	محيط الشكل في الدائرة	محيط الشكل حول الدائرة
٦	٦٠٠٠٠٠٠	٦٠٨٢٢٠٢٣-
١٢	٦٠٢١١٦٥٧+	٦٠٤٢٠٧٨١-
٢٤	٦٠٢٦٥٢٥٧+	٦٠٢١٩٢٢٠-
٤٨	٦٠٢٧٨٧٠٠+	٦٠٢٩٢١٧٣-
٩٦	٦٠٢٨٢٠٦٣+	٦٠٢٨٥٤٢٠-
١٩٢	٦٠٢٨٢٩٠٤+	٦٠٢٨٢٧٤٧-
٣٨٤	٦٠٢٨٣١١٥+	٦٠٢٨٣٢٢٧-
٧٦٨	٦٠٢٨٣١٦٧+	٦٠٢٨٣٢٢١-
١٥٣٦	٦٠٢٨٣١٨٠+	٦٠٢٨٣١٩٥-
٣٠٧٢	٦٠٢٨٣١٨٤+	٦٠٢٨٣١٨٨-
٦١٤٤	٦٠٢٨٣١٨٥+	٦٠٢٨٣١٨٦-

فندى فضلة المحيطين اقل من واحد في المتزلة السادسة من الكسور العشرية اي اقل من $\frac{1}{1000000}$ من نصف القطر فالخطأ في معرفة محيط الدائرة هو اقل من $\frac{1}{1000000}$ من نصف قطرها فاذا قُرِضَ ن = نصف القطر فالمحيط هو أكثر من ن X $\frac{1}{1000000}$ او من $\frac{1}{1000000}$ X ن و اقل من $\frac{1}{1000000}$ X ن و فضلنها انما هي $\frac{1}{1000000}$ من نصف القطر

وهكذا ن X $\frac{1}{1000000}$ اقل من مساحة الدائرة ون X $\frac{1}{1000000}$ أكثر من مساحة الدائرة وفضلنها هي $\frac{1}{1000000}$ من مربع نصف القطر . وطى هذا الاسلوب بقرب الى الصحيح أكثر ما تقدم ولكن الى الآن لم توجد نمية القطر الى المحيط تماماً .

اصول الهندسة

مضافات

الكتاب الثاني

في تقاطع السطوح

حدود

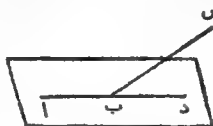
- ١ الخط المستقيم العمودي على سطح هو ما احدث زاوية قائمة مع كل خط مستقيم في ذلك السطح
- ٢ اذا تقاطع سطحان وكانت كل الخطوط المستقيمة في احدهما العمودية على خط التقاطع عمودية ايضاً على السطح الآخر فالسطح الاول عمودي على الثاني
- ٣ ميل خط مستقيم على سطح هو الزاوية الحادة الحادثة بين ذلك الخط وخط آخر مستقيم مرسوم من ملتقى الخط الاول بالسطح الى ملتقى السطح وعمودي عليه من اية نقطة كانت في الخط الاول
- ٤ الزاوية بين سطحين يتقاطعان في الحادة بين خطين مستقيمين كل واحد منهما في سطح من السطحين وكل واحد منهما عمودي على خط تقاطعها ومن الزاويتين المتوالتين الحادتين من ذلك الحادة في ميل احد السطحين على الآخر
- ٥ اذا عدلت الزاوية المذكورة الحادة بين سطحين الزاوية الحادة بين سطحين آخرين يقال ان ميل الاولين مثل ميل الآخرين
- ٦ الخط المستقيم الموازي سطحاً هو الذي لا يلاقى السطح ولو اُخرج على استقامته الى غير نهاية

- ٧ السطوح المتوازية هي التي لا تتلاقى ولو امتدت الى غير نهاية
٨ الزاوية المجسمة في الحادثة من التواء ثلاث زوايا بسيطة فأكثر ليست في سطح واحد

القضية الاولى . ن

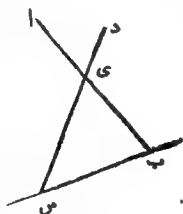
لا يكون قسم من خط مستقيم في سطح وقسم آخر منه فوق ذلك السطح

ان كان ممكنا ليكن ab س خطا مستقيما وليكن القسم ab منه في سطح والقسم $ب س$ منه فوق السطح . فليكون ab في سطح فيمكن اخراجه في ذلك السطح (اولى المتقضيات كـ ١) فلينخرج الى d فيكون ab س ab و d خطين مستقيمين لما قسم مشترك ab وذلك غير ممكن (فرع حد ٢ كـ ١) فلا يكون ab س خطا مستقيما



القضية الثانية . ن

اذا التقت ثلاثة خطوط مستقيمة في غير نقطة واحدة فهي في سطح واحد لتتلاقى الخطوط الثلاثة المستقيمة ab س $س د$ في النقطة $ب س$ فهي في سطح واحد



ليمر سطح بالخط المستقيم $ب$ وليد السطح على $ب س$ حتى يمر بالنقطة $س$. فليكون $س$ في هذا السطح يكون الخط $س$ فيه ايضا وقد فرض ان $ب س$ فيه فالخطوط الثلاثة $س ب$ $ب س$ $س د$ هي في السطح الواحد وهي اتسام من $ب ا$ $ب س$ $س د$ ولا يكون قسم من خط في

ق غ = غ د فالخط ق د قد تنصف في غ . ولأن ب ا د قائمة ب د = ب ا + ا د
(ق ٤٧ ك ١) وب ق = ب ا + ا ق وب د = ب ق + ق د = ب ا + ا ق + ا د + ا ق .
ولأن د ق قد تنصف في غ (ق ١ ك ٢) ا د + ا ق = ا غ + غ ق فاذن ب د +
ب ق = ب ا + ا غ + غ ق + غ ق ولكن ب د + ب ق = ب غ + غ ق
(ق ١ ك ١) فاذن ب غ + غ ق = ب ا + ا غ + غ ق + غ ق . اطرح غ ق
من الجانبين فيبقى ب غ = ب ا + ا غ او ب غ = ب ا + ا غ فتكون
ب ا غ قائمة (ق ٤٨ ك ١) واغ هو في السطح الذي فيه ا د ا ق والخط العمودي
على خطه في سطح ما هو عمودي على ذلك السطح (حد ٢ ك ٢ مضافات) فالخط
ا ب هو عمود على سطح الخطين ا ق ا د

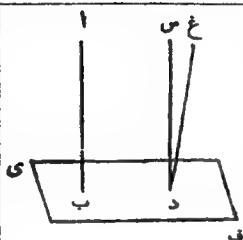
القضية الخامسة . ن

اذا تلاقت ثلاثة خطوط مستقيمة في نقطة واحدة وكان خط آخر
مستقيم عموداً على الثلاثة في تلك النقطة فالخطوط الثلاثة في سطح
واحد

ليكن ب س ب د ب ي ثلاثة خطوط مستقيمة متلاقية في النقطة ب وليكن
ب ا عموداً عليها في تلك النقطة فهذه الخطوط الثلاثة
في في سطح واحد

والا فان كان ممكناً ليكن ب د وب ي في سطح
وب س فوقه وليمر سطح في ا ب وب س وليكن
موضع تقاطع مع السطح الذي فيه ب د وب ي
خطاً مستقيماً (ق ٢ ك ٢ مضافات) وليكن ب ف
ذلك الخط فالخطوط الثلاثة المستقيمة ا ب ب س ب ي

ب ف في في سطح واحد اي الذي يمر في ا ب وب س . ولكون ا ب عموداً على كل
من الخطتين المستقيمتين ب د ب ي فهو عمود على السطح المار بهما (ق ٢ ك ٢ مضافات)
وهو عمود على كل خط في ذلك السطح وب ف هو في السطح الذي يلاقوه فالزاوية



فيكون س د ايضاً عموداً على
وان لم يكن س د عموداً على السطح الذي
اب عمود عليه فيمكن د غ عموداً عليه فاذا
د غ يوازي اب (ق ٦ ك ٢ مضافات) وكلا
د س د غ يوازي اب وقد رُسمتا من نقطة
واحدة وذلك غير ممكن (المقالة ١١ ك ١)

القضية الثامنة . ن

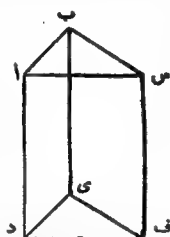
خطان مستقيمان يوازيان خطأ ثالثاً مستقيماً هما متوازيان وان لم تكن
في سطح واحد

نفرض ان الخطين المستقيمين اب وس د يوازيان الخط المستقيم ي ف وهو
ليس في سطحها فالخط اب يوازي الخط س د
في ي ف خذ اية نقطة شئت مثل غ ومنها
ارسم الخط المستقيم غ ح في السطح المار بالخطين
اب ي ف وليكن غ ح عموداً على ي ف
وغ ك عموداً على ي ف في السطح الذي يمر
بالخطين ي ف س د . ولكون ي ف عموداً على ح غ وك غ فهو عمود على السطح
المار بها ح غ ك (ق ٤ ك ٢ مضافات) وي ف يوازي اب فاذا اب هو عمود على
السطح ح غ ك (ق ٧ ك ٢ مضافات) ولهما السبب س د عمود على السطح ح غ ك
فكلا اب وس د عمود على سطح واحد فهما متوازيان (ق ٦ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة . ن

اذا تلاقي خطان مستقيمان ووازي خطين آخرين مستقيمين متلاقين
وليسا في سطح الاولين فالزاوية الحادثة بين الاولين تعدل الحادثة بين
الآخرين

ليكن $ا ب س$ بث خطين مستقيمين ولتلقيا في $ب$ وليوزيا خطين آخرين



مستقيمين $د ي$ في $ي$ الملتصين في $ي$ وليسا في سطح

الاولين فالزاوية $ا ب س$ تعدل الزاوية $د ي ف$. اقطع

الاقسام المتساوية $ب ا ب س ي د ي ف$ وارسم $ا د$

$ب ي س ف ا س د ف$. فلكون $ب ا = ي د$

ويوزيو فالخط $ا د = ب ي$ ويوزيو (ق ٢٣ ك ١)

ولهذا السبب $س ف = ب ي$ ويوزيو فاذا $ا د =$

$س ف$ ويوزيو (ق ٨ ك ٢ مضافات) واس $= د ف$ ويوزيو (ق ٢٣ ك ١) فلكون

$ا ب و ب س$ يعدلان $د ي و ي ف$ والقاعدة $ا س =$ القاعدة $د ف$ فالزاوية $ا ب س$

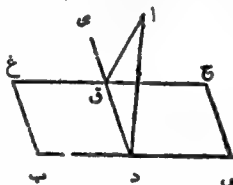
$=$ الزاوية $د ي ف$ (ق ٨ ك ١)

القضية العاشرة. ع

علينا ان نرسم عموداً على سطح من نقطة مفروضة فوقه

لتكن $ا$ النقطة المفروضة وب $ح$ السطح المفروض. علينا ان نرسم عموداً على

$ب ح$ من النقطة $ا$



ارسم في السطح اي خط مستقيم شئت

مثل $ب س$ ومن $ا$ ارسم $ا د$ عموداً على

$ب س$ (ق ١٢ ك ١) فاذا كان $ا د$ عموداً

على السطح $ب ح$ ايضاً فقد تم العمل. والآن

فن النقطة $د$ ارسم الخط المستقيم $د ي$ في السطح $ب ح$ واجعله عموداً على $ب س$.

ومن $ا$ ارسم $ا ق$ عموداً على $د ي$. وفي $ق$ ارسم $ق ح$ حتى يوزي $ب س$ (ق ٢١ ك ١)

فلكون $ب س$ عموداً على $د ا$ وعلى $د ي$ فهو عمود على السطح المار بها (ق ٤

ك ٢ مضافات) و $ق ح$ يوزي $ب س$ فهو ايضاً عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢

مضافات) وهو عمود على كل خط مستقيم في ذلك السطح (حد ١ ك ٢ مضافات)

وبلغوا $ا ق$ الذي هو في السطح المذكور اي المار بالخطين $ا د$ و $د ي$ فاذا $ا ق$ عمود

على $ق ح$ و $د ي$ على موضع التقائهما فهو عمود على سطحها (ق ٤ ك ٢ مضافات) وذلك

السطح هو $ب ح$ فقد رُسم $ا ق$ عموداً على السطح $ب ح$ من النقطة المفروضة

فرع. لو فرض ان يرسم عمود على سطح من نقطة فيه مثل س فمبن نقطة فوقه مثل ا ويرسم اى عموداً على السطح ومن س ارم خطاً حتى يوازي اى فيكون عموداً على السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات)

القضية الحادية عشرة. ن

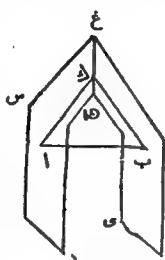
من نقطة واحدة في سطح لا يكون خطان مستقيمان عمودين على ذلك السطح على جانب واحد منه. ومن نقطة فوقه لا يكون اكثر من خط واحد عموداً عليه

ان كان ممكناً ليكن اس اب عمودين على سطح مفروض على نقطة واحدة منه هي ا وعلى جانب واحد منه وليرسم سطح بهذين الخطين ب ا س افصل تقاطع هذا السطح بالسطح المفروض هو خط مستقيم ماراً بالنقطة ا (ق ٢ ك ٢ مضافات) ليكن د اى محل التقاطع فالحطوط المستقيمة ب ا س ا د اى هي في سطح واحد.

ولكون س ا عموداً على السطح المفروض فهو عمود على كل خط مستقيم يلاقيه في ذلك السطح فالزاوية س اى قائمة ولها السبب ايضاً ب اى قائمة وهما في سطح واحد وهذا غير ممكن. ومن نقطة مفروضة فوق السطح لا يكون الا خط واحد عموداً على السطح والا لكانا متوازيين (ق ٦ ك ٦ مضافات) وذاك محال

القضية الثانية عشرة. ن

اذا كان خط مستقيم عموداً على سطوح فذلك السطوح متوازية
ليكن الخط المستقيم اب عموداً على السطحين س د ف فها متوازيان

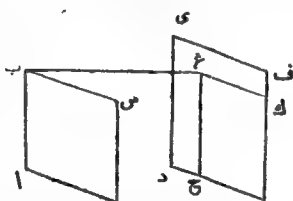


والأفلا بد من الثاقها اذا أخرجا ويكون محل
تقاطعها خطاً مستقيماً غ ح . خذ في غ ح اية نقطة شئت
مثل ك وارسم اك ب ك . فلكون اب عموداً على
السطح ي ف فهو عمود على كل خطٍ مستقيم يلاقيه في
ذلك السطح (حد اك ٢ مضافات) فهو عمود على
ب ك وب ك قائمة . ولهذا السبب ايضاً ب ك قائمة
ففي المثلث ك اب قائمتان وذاك غير ممكن (ق ١٧ ك ١)
فالسطحان لا يتلاقيان ولو أخرجا فيها متوازيان (حد ٧ ك ٢ مضافات)

القضية الثالثة عشرة . ن

اذا كان خطان مستقيمان ملتقيان متوازيين لخطين مستقيمين آخرين
اللذين يلتقيان ايضاً وليسا في سطح الاولين فالسطح المار بالاولين
يوازي المار بالآخرين

ليكن اب ب س خطين مستقيمين ولتلاقيا في ب وليوازي خطين آخرين
مستقيمين ليسا في سطحها د ي ف ي
اللذين يلتقيان في ي . فالسطح المار
بالاولين يوازي المار بالآخرين



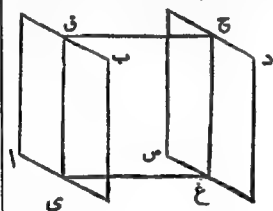
من ب ارم ب غ عموداً على
السطح المار بالخطين د ي ف

(ق ١٠ ك ٢ مضافات) وليلاق في غ ومن غ ارم غ ح حتى يوازي د ي (ق ٢١
ك ١) و غ ك حتى يوازي ف ي . فلكون ب غ عموداً على سطح د ي ف فهو عمود
على كل خطٍ يلاقيه في ذلك السطح (حد ٢ ك ٢ مضافات) فتكون كل واحدة من
الزاويتين ك غ ب ح غ ب قائمة . ولكون ب ا يوازي غ ح (ق ٨ ك ٢ مضافات)
فالزاويتان ح غ ب اب غ معاً تعدلان قائمتين وح غ ب قائمة فتكون اب غ
ايضاً قائمة و غ ب عمود على ب ا ولهذا السبب ايضاً هو عمود على ب س . فهو عمود

على السطح المار بها وقد رُمِّ عموماً على سطح د ي ف فهو عمود على السطحين فيها متوازيان (ق ١٢ ك ٢ مضافات)
 فرع . اذا لاقى خط مستقيم سطحين متوازيين وكان عموداً على احدهما فهو عمود على الثاني ايضاً

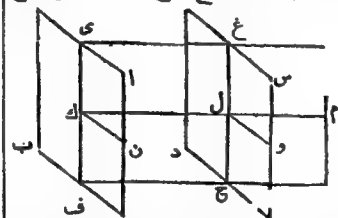
الفضية الرابعة عشرة . ن

اذا قطع سطح مستويين متوازيين فخطا التقاطع متوازيان
 ليكن ا ب وس د سطحين متوازيين وليقطعهما السطح ح ي غ ح فخطا التقاطع
 ح ي غ ح متوازيان
 لان الخط ح ي ق في السطح ا ب
 والخط غ ح في السطح س د وكل واحد
 يبق في سطحوهما اخرج والسطحان لا
 يلتقيان لانها متوازيان فالخطان لا
 يتلاقيان ولو اُخرجا فيها متوازيان
 (حد ٢٠ ك ١)



الفضية الخامسة عشرة . ن

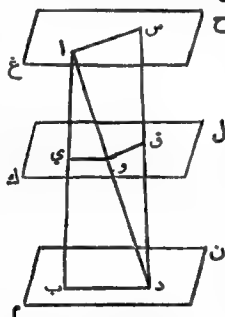
اذا قطع سطح مستويين متوازيين فلها ميل واحد على ذلك السطح
 ليكن ا ب وس د سطحين متوازيين وليقطعهما السطح ح ي غ ح فخطا التقاطع
 ح ي غ ح ميل س د على ح ي
 ليكن الخطان المتقاطعتين
 ح ي غ ح موضع التقاطع
 من آية نقطة شئت في ح ي ف مثل
 ك ارم الخط ك م في السطح ح ي
 عموداً على ح ي ف ولا يلاقى غ ح في
 ل وارم كن عموداً على ح ي ف في السطح ا ب ويمر سطح بالخطين المتعبرين ك ن



ك م حتى يقطع السطح س د في الخط ل و . فلكون السطح ح ي ب لاقب السطحين
 المتوازيين ا ب س د في الخطين ح ي ف غ ح فهذان الخطان متوازيان (ق ١٤ ك ٢
 مضافات) وى ق انما هو عمود على السطح المار بالخطين ك ن ك م (ق ٤ ك ٢
 مضافات) لانه عمود على ك ن وك م فالخط غ ح ايضا عمود على ذلك السطح
 (ق ٧ ك ٢ مضافات) فهو عمود على الخطين ل م ل و اللذين يلاقياه في ذلك
 السطح . ولان ل م ل و عمودان على ل غ محل تقاطع السطحين س د وى ح
 فالزاوية ول م هي ميل السطح س د على السطح ح (ج د ٤ ك ٢ مضافات) وهكذا
 ايضا ك ن هي ميل السطح ا ب على السطح ح . ون ك يوازي ول فالزاوية
 الداخلة ن ك م تعدل الخارجة م ل و (ق ٢٦ ك ١) فميل السطح ا ب على ح
 يعدل ميل السطح س د على س د على ح

القضية السادسة عشرة . ن

سطوح متوازية اذا قطعت خطين مستقيمين نقطعهما على نسبة واحدة
 ليكن غ ح ك ل م ن سطوحا متوازية ولتقطع الخطين المستقيمين ا ب س د



في النقط اى ب س ق د فنسبة اى : ح
 ي ب :: س ق : ق د

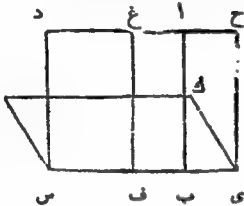
ارسم اس ب د ا د . واما ا د فليلاق
 السطح ك ل في و . ارسم و و ق . فلان السطحين
 المتوازيين ك ل م ن قد قطعها السطح ح ي ب د و
 فخطا التقاطع ح ي و ب د متوازيان (ق ١٤ ك ٢
 مضافات) وهكذا ايضا يبرهن ان اس و ق
 متوازيان . ولكون ح ي و يوازي ب د ضلعا من

المثلث ا ب د فنسبة اى : ب :: او : د (ق ٢ ك ٦) ولان ق و يوازي اس
 ضلعا من المثلث ا د س فنسبة او : د :: س ق : ق د فبالسواة (ق ١١ ك ٥)
 اى : ب :: س ق : ق د

القضية السابعة عشرة . ن

اذا كان خطٌ مستقيمٌ عموداً على سطحٍ فكل سطحٍ مارٍ بذلك الخط هو عمود على السطح الاول

ليكن الخط المستقيم اب عموداً على السطح س ك فكل سطح يمر بالخط اب هو عمود على السطح س ك



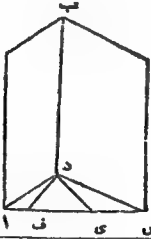
ليبر سطح مثل دى في الخط اب وليكن الخط سى محل تقاطع السطح س ك . في سى خذ اية نقطة ثبت مثل ف وفي السطح دى ارم ف غ عموداً على سى . وليكون اب عموداً على السطح س ك

فهو عمود على كل خط مستقيم يلاقوه في ذلك السطح (هذا ك ٢ مضافات) فهو عمود على سى واب ف قائمة وغ ف ب ايضاً قائمة فاذا اب بوازي غ ف (ق ٢٨ ك ١) واب عمود على السطح س ك فالخط غ ف ايضاً عمود على ذلك السطح (ق ٧ ك ٢ مضافات) واب وغ ف في السطح دى فالسطح دى عمود على السطح س ك (حد ٢ ك ٢ مضافات) وهكذا يبرهن ان كل السطوح المارة بالخط اب عمودية على س ك

القضية الثامنة عشرة . ن

اذا تقاطع سطحان وكانا عموديين على سطح ثالث فخط تقاطعها هو ايضاً عمود على ذلك السطح

ليكن اب وب س سطحين وليتقاطعا في الخط ب د وليكونا عموديين على السطح ا د س فالخط ب د هو ايضاً عمود على ا د س



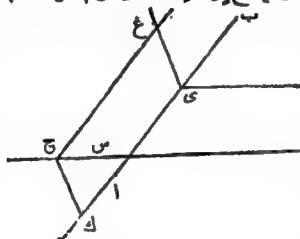
من د في السطح ا د س ارم دى عموداً على ا د ود ف عموداً على د س . فليكون دى عموداً على د ا خط تقاطع السطحين اب ا د س واب عموداً على ا د س فالخط دى عمود على السطح اب (حد ٢ ك ٢ مضافات) فهو ايضاً عمود على الخط ب د الذي في ذلك

السطح (حد ١ ك ٢ مضافات) وهكذا أيضاً يبرهن ان د ف عمود على د ب فالخط
د ب عمود على د ي ود ف فهو عمود على سطحها اي على ا د س (ق ٤ ك ٢ مضافات)

القضية التاسعة عشرة . ع

علينا ان نرسم خطاً عمودياً على خطين مستقيمين مفروضين وضعاً
وليسا في سطح واحد

ليكن ا ب وس د الخطين ولا يكونان في سطح واحد . علينا ان نرسم عموداً عليها



في ا ب خذ نقطة ي ومن

ي ارم ي ف حتى يوازي س د د

وليكن ي غ عموداً على السطح

المارّ بالخطين ي ب ي ف د

(ق ١٠ ك ٢ مضافات) وليبر

السطح غ ك بالخطين ا ب و غ ي

وليتاق س د في ح ومن ح ارم ح ك عموداً على ا ب فالخط ح ك هو المطلوب .

من ح ارم ح غ حتى يوازي ا ب

فلكون ح ك و غ ي عمودين على ا ب وها في سطح واحد فها متوازيان . ولان

ح غ ح د يوازيان ي ب و ي ف فالسطح غ ح د يوازي السطح ي ب ف (ق ١٢

ك ٢ مضافات) فالخط غ ي العمودي على ي ب ي ف فهو عمود على السطح غ ح د

ايضاً (فرع ق ١٢ ك ٢ مضافات) و ح ك يوازي غ ي فهو عمود على السطح غ ح د

(ق ٧ ك ٢ مضافات) فهو عمود على ح د الواقع في ذلك السطح (حد ١ ك ٢ مضافات)

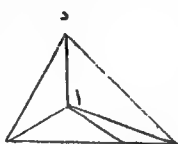
وقد رُسم ح ك عموداً على ا ب فهو عمود على الخطين المفروضين

القضية العشرون . ن

اذا احاطت ثلاث زوايا بسيطة بزواية مجسمة فكل اثنتين منها معاً

أكبر من الثالثة

لتنع الزاوية المجسمة ا بين الزوايا الثلاث البسيطة ب ا س ب ا د س ا د



فكل اثنين منها معاً أكبر من الثالثة

فان كانت هذه الزوايا الثلاث متساوية فالامر
وانع ان اثنين منها معاً أكبر من الثالثة . وان لم تكن
متساوية فلتكن ب ا س الزاوية التي ليست اصغر

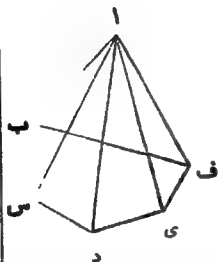
من احدى الاخرين والتي هي أكبر من احدهما اي س ب
من د ا ب . وعند النقطة ا في الخط المستقيم ا ب وفي السطح المار بالخطين ب ا
اس اجعل الزاوية ب ا س تعدل الزاوية د ا ب (ق ٢٣ ك ١) واجعل اي = ا د
وفي النقطة س ارم الخط ب س حتى يقطع ا ب واس في ب وس وارسم ب د
ود س

فلكون د ا = ا س واب مشترك بين المثلثين ب ا د ب ا س والزاوية ب ا د =
ب ا س فالقاعدة ب د تعدل القاعدة ب س (ق ٤ ك ١) ولان ب د و د س معاً
اطول من ب س (ق ٢٠ ك ١) وقد تبين ان احدهما ب د = ب س الذي هو
جزء من ب س فالآخر د س هو اطول من الباقي س . ولان د ا = ا س واس
مشترك بين المثلثين والقاعدة د س اطول من القاعدة س فالزاوية د ا س هي
أكبر من الزاوية س ا س (ق ٢٥ ك ١) وقد جعلت الزاوية د ا ب = ب ا س
فالزاويتان د ا ب د ا س معاً أكبر من ب ا س ا س او من ب ا س . وقد فرض
ان ب ا س ليست اصغر من احدى الزاويتين ب ا د د ا س فتكون ب ا س مع
احدى الاخرين أكبر من الثالثة

القضية الحادية والعشرون . ن

الزوايا البسيطة المحيطة بزاوية مجسمة هي معاً اصغر من اربع زوايا
قائمة

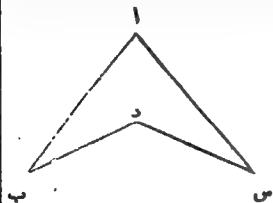
لكن ازاوية مجسمة وثلاث زوايا بسيطة ب ا س ا د ا س ا ف



ف ا ب فهي معاً أصغر من أربع زوايا قائمة
لنقطع السطوح المحيطة بالزاوية المجسمة ا
بسطح آخر وليكن محل التقاطع الشكل ذا الأضلاع
المستقيمة ب س د ي ف. فالزاوية المجسمة عند ب
تحيط بها ثلاث زوايا بسيطة س ب ا ا ب ف
ف ب س وكل اثنين منها أكبر من الثالثة
(ق ٢٠ ك ٢ مضافات) فالزاويتان س ب ا

ا ب ف معاً أكبر من ف ب س . ولذا السبب ايضاً الزاويتان البسيطتان عند كل
واحدة من النقط س د ي ف وهي التي عند قواعد المثلثات المتلاقية في ا هـ أكبر من
الثالثة عند تلك النقط . فجميع الزوايا عند قواعد المثلثات هي معاً أكبر من جميع
زوايا الشكل . وجميع زوايا المثلثات معاً تعدل من الزوايا القائمة مضاعف عدة
المثلثات (ق ٢٢ ك ١) او مضاعف أضلاع الشكل ب س د ي ف وجميع زوايا
الشكل مع أربع زوايا قائمة تعدل من الزوايا القائمة مضاعف عدة أضلاع الشكل
(فرع أول ق ٢٢ ك ١) فجميع زوايا المثلثات تعدل جميع زوايا الشكل مع أربع
زوايا قائمة . ولكن جميع الزوايا عند قواعد المثلثات أكبر من جميع زوايا الشكل كما
قد تبين فالزوايا الباقية من المثلثات أي التي عند مجنec المثلثات المحيطة بالزاوية
المجسمة ا هي أصغر من أربع زوايا قائمة

تعلية . اذا كانت إحدى زوايا الشكل ب س د ي ف خارجة كالزاوية عند
د لا نصح هذه القضية لأن الزوايا المجسمة عند القاعدة غير محاطة كلها بالزوايا



البسيطة التي اثبات منها في السطوح
المثلثة المجسمة عند ا والثالثة زاوية داخلية
من الشكل المذكور . فلا يقال ان مجنec
الزوايا عند قواعد المثلثات هو ضرورة
أكبر من مجنec زوايا الشكل
ب س د ي ف

اصول الهندسة

مضافات

الكتاب الثالث

في مقابلة الاجسام

حدود

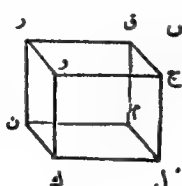
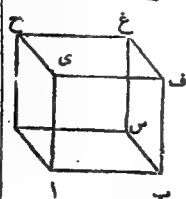
- ١ الجسم هو ما كان له طول وعرض وعمق
- ٢ والاجسام المتشابهة هي التي تحيط بها عدة واحدة من سطوح متشابهة شكلاً ووضعاً لما ميل واحد بعضها على بعض
- ٣ المَرَم جسم يحيط به سطوح متلاقية في نقطة واحدة وتلك السطوح في بين هذه النقط و سطح آخر
- ٤ المنشور ويقال له المنشور جسم يحيط به سطوح منها سطحان متقابلان متساويان متشابهان ومتوازيان والبقية ذات اضلاع متوازية
- ٥ المخروطي المطروح هو جسم يحيط به ستة سطوح كل واحد منها ذو اربعة اضلاع وكل اثنين منها متقابلان
- ٦ المكعب جسم يحيط به ستة مربعات متساوية
- ٧ الكرة جسم يرسم بدوران نصف دائرة على قطر ثابت
- ٨ محور الكرة ويقال له الجَزَعُ او الجَزَعُ هو الخط الثابت الذي دار طوله نصف الدائرة
- ٩ مركز الكرة هو مركز نصف الدائرة الذي رُسمت الكرة بدورانه
- ١٠ قطر الكرة هو خط مستقيم يمر بمركزها وينتهي طرفاه في سطحها

- ١١ المخروط هو جسم يُرسم بدوران مثلث ذي قائمة على أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة
- ١٢ محور المخروط أو جزعهُ هو الضلع الثابت من المثلث الذي يرسم المخروط بدورانه
- ١٣ قاعدة المخروط هي الدائرة المرسومة بالضلع الدائر الذي يلي القائمة من المثلث الذي بدورانه يرسم المخروط
- ١٤ الاسطوانة جسم مُرسم (بدوران) شكل ذي اضلاع متوازية وزوايا قائمة على أحد اضلاعها
- ١٥ سم الاسطوانة أو محورها هو الضلع الثابت من الشكل الذي رُسمت الاسطوانة بدورانه
- ١٦ قاعدتا الاسطوانة هما الدائرتان المحادّتان من دوران الضلعين المتقابلين من الشكل الذي بدورانه رُسمت الاسطوانة
- ١٧ الخاريط المشابهة والاساطين المشابهة هي التي تكون سهاها واقطار قواعدها متناسبة

القضية الاولى . ن

إذا أُحيط جسمان بعدة متائلة من السطوح المتساوية المتشابهة شكلاً ووضعاً وكان ميل السطحين المتواليين في الجسم الواحد مثل ميل نظيرهما في الآخر فالجسمان متساويان ومتشابهان

ليكن اغ وك ق جسمين محاطين بعدة متائلة من السطوح المتساوية المتشابهة

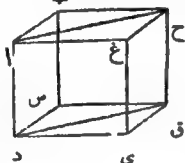


شكلاً ووضعاً أي السطح اس ق يشبه السطح ك م ويعدله واف يشبه ك ج ويعدله وهكذا في البقية وليكن ميل اف على اس مثل ميل ل

ك ج على ك م وهكذا في البقية فالجسم ك ق يعدل الجسم ا غ ويشبه
ليوضع الجسم ك ق حتى تطبق قاعدته ك م على اس قاعدة الجسم ا غ اي حتى
تقع ن على د وك على ا وم على س ول على ب اذ القاعدتان متساويتان ومتشابهتان
(اولية ثامنة ك ا). فلكون السطح ك م يطابق السطح ا س وبالمفروض ميل ك ر على
ك م مثل ميل ا ح على ا س فالسطح ك ر يطابق السطح ا ح لانها متساويتان
ومتشابهتان (اولية ثامنة ك ا) وضلعاهما المتساويتان ك ن و ا د متطابقتان. وهكذا
يبرهن في بقية سطوح الجسبين ان كل واحد يطابق نظيره فالجسمان متطابقان كلياً
فهما متساويان ومتشابهان .

الفضية الثانية. ن

اذا أحيط جسم بستة سطوح كل اثنين منها متوازيان فالسطوح
المتقابلة هي اشكال متوازية الاضلاع متشابهة ومتساوية
لكن س د غ ح جماً احاط به السطوح المتوازية اس غ ق وب غ س ي
وق ب ي ا فالسطوح المتقابلة هي متوازية الاضلاع
متشابهة ومتساوية



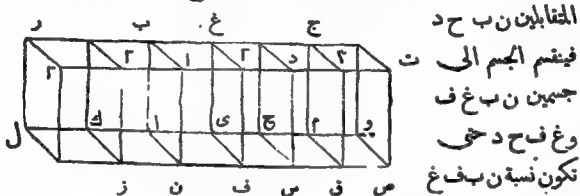
لأن السطح اس يقطع السطحين المتوازيين ب غ
وس ي فخطاً التقاطع اب ود س متوازيان (ق ١٤) و
ك ٢ مضافات) ولأن السطح اس يقطع السطحين

المتوازيين ب ق و ا ي فخطاً التقاطع ب س و ا د متوازيان و اب بوازي س د كما
نقدم فالشكل اب س د متوازي الاضلاع وهكذا يبرهن في بقية السطوح انها متوازية
الاضلاع. ارم ا ح ود ق. فلكون اب بوازي د س وب ح بوازي س ق فالخطان
المتلاقعان اب ب ح بوازيان المتلاقعين د س س ق. فالزاوية اب ح = د س ق
(ق ٩ ك ٢ مضافات) ولكون اب ب ح يعدلان د س س ق والزاوية اب ح
= د س ق فالقاعدة ا ح = د ق (ق ٤ ك ١) والمثلث اب ح = المثلث د س ق.
ولهذا السبب ا غ ح = د ي ق فالشكل ب غ = س ي وهكذا يبرهن ان ا س =
غ ق و ا ي = ب ق

الفضية الثالثة . ن

جسم متوازي السطوح اذا قُطع بسطح يوازي سطحين متوازيين من
سطوحه ينقسم الى جسمين نسبة بعضهما الى بعض كنسبة قاعدتيهما
بعضهما الى بعض

ليكن ا ب س ج م متوازي السطوح وليقطعه السطح ف غ الموازي للسطحين



اخرج اح الى الجهتين وخذ م وم وحتى يعدلاى ح وخذ اك كل حتى
يعدلاى و تم الاشكال المتوازية الاضلاع ل ز ك ن ح ق م ص والاجسام ل ٢
ك ا ح ٢ م ت . المخطوط ل ك ا اى متساوية والمخطوط ك ز ا ن اى ف
متساوية وهي تحدث زوايا متساوية مع ل ك ا و اى فالاشكال المتوازية الاضلاع
ل ز ك ن ا ف متساوية ومتشابهة (ق ٢٦ ك ا و حد ا ك ٦) وهكذا الاشكال
ك ر ك ب ا غ وايضا الاشكال ل ٢ ك ا ١ ١ ٢ (ق ٢ ك ا ٢ مضافات) لانها
سطوح متقابلة . وهكذا يبرهن ان الاشكال اى س ح ق م ص متساوية
(ق ٢٦ ك ا ١ حد ا ك ٦) وايضا الاشكال ح غ ح ج ج و وايضا ح د م ت و
(ق ٢ ك ا ٢ مضافات) فثلاثة سطوح من الجسم ل ٢ تعدل وتشبه ثلاثة سطوح
من الجسم ك ا و ثلاثة سطوح من الجسم ا ٢ والثلاثة التي تقابلها في الاجسام
الثلاثة هي متساوية ومتشابهة (ق ٢ ك ا ٢ مضافات) فالاجسام ل ٢ ك ا ١ ١
نحيط بها سطوح متساوية ومتشابهة . ولكون المخطوط ل ٢ ك ا ١ ١ ٢ متوازية
ويقطعها السطح ر ٢ يكون ميل ل ٢ على ر ٢ مثل ميل ك ٢ على ب ٢ او ميل ا ١
على ب ٢ (ق ١٥ ك ا ٢ مضافات) وهكذا يقال في بقية السطوح المتوازية . فالاجسام

ل ٢ ك ١ ١ في متساوية (ق ١ ك ٢ مضافات) . وهكذا يبرهن ان الاجسام
 ي د ح ٢ م متساوية فكما تكرر ا ف في ل ف هكذا يتكرر الجسم ٢ ا في الجسم
 ل ٢ وكذلك كما تكرر ا ف في ف وهكذا يتكرر الجسم ي د في الجسم ي ت واذا
 كانت القاعدة ل ف تعدل القاعدة ف و فالجسم ل ٢ يعدل الجسم ي ق (ق ١
 ك ٢ مضافات) وان كانت اكبر فاكبر وان كانت اصغر فاصغر فالقاعدة ا ف :
 القاعدة ج ف :: الجسم ٢ ا : الجسم ي د (حده كه)

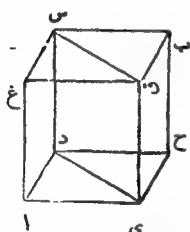
فرع . لان الشكل المتوازي الاضلاع ا ف : ف ح :: ن ف : ف س (ق ١ ك ٦)
 فالجسم ٢ ا : الجسم ي د :: ن ف : ف س

الفضية الرابعة . ن

جسم متوازي السطوح اذا قطعه سطح مار بقطري السطحين المتقابلين

ينقسم الى موشورين متساويين

ليكن ا ب جسماً متوازي السطوح ويُفْطَعُ بالسطح س ق ي د المار بقطري
 السطحين المتقابلين غ ب و ا ح فانه ينقسم الى
 موشورين متساويين . لان س د يوازي غ ا و ق ي
 يوازي غ ا و ه لیس من سطحو ف الخطان س د ق ي
 متوازيان (ق ١ ك ٨ مضافات) فالقطران س ق
 د ي ه ا في سطح س د و ق ي فهما متوازيان (ق ١٤
 ك ٢ مضافات) والثلث س ب ق = س غ ق



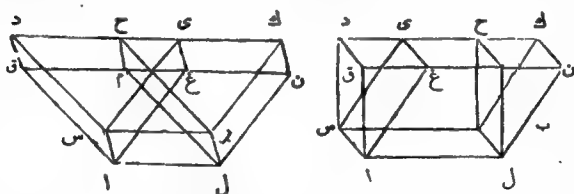
(ق ١٤ ك ١) و د ح ي = د ا ي والشكل س ا يعدل الشكل المقابل ل ه ب ي
 (ق ٢ ك ٢ مضافات) و غ ي = س ح فالسطوح الهیطة بالموشورين س ا ي
 س ب ي متساوية ومتشابهة كل واحد بظهوره في على ميل واحد بعضها على بعض
 لان السطح ا س يوازي السطح ي ب و ا ق يوازي س ح و يقطعها السطح س ي (ق ١٥
 ك ٢ مضافات) فالموشور س ا ي = س ب ي (ق ١ ك ٢ مضافات)

تنبيه . في النضايا الآتية يراد بالخطوط الواقعة اضلاع الاشكال الواقعة بين
 قاعدة الجسم والسطح الذي يقابلها

القضية الخامسة . ن

اجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد في متساوية
اذا انتهت خطوطها الواقعة الى خط مستقيم واحد في السطح الذي
يقابل القاعدة

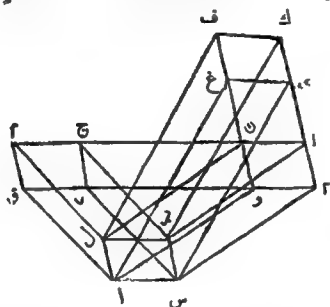
ليكن اح ا ك جسمين على قاعدة واحدة اب وعلى علو واحد وخطوطها الواقعة



اق اغ ل م ل ن متبعية الى خط واحد ق ن والمخطوط س د س ي ب ح
ب ك متبعية الى خط واحد د ك فالجسمان متساويان
لان س ح س ك متوازي الاضلاع فالضلع س ب يعدل كل واحد من
الضلعين المتقابلين د ح وى ك (ق ٢٤ ك ١) د ح = س ي ك فان اضيف اليها الجزء
المشترك ح ي او طرح منها فالجميع او الباقي د ي = الجميع او الباقي ك ح والثلث
س د ي = ب ح ك (ق ٢٨ ك ١) والشكل د غ = الشكل ح ن (ق ٢٦ ك ١) ولهذا
المسبب اق غ = ل م ن وس ق = ب م (ق ٢ ك ٢ م) وس غ = ب ن لانها
سطوح متقابلة فالمطروح المحيطة بالمشور دا غ انما تعدل ونسبة السطوح المحيطة
بالمشور ح ل ن كل واحد يعدل ونسبة نظيرة والسطوح المتوالية هي على ميل واحد
بعضها على بعض (ق ١٥ ك ٢ م) فالمشوران دا غ ح ل ن متساويان (ق ٢ ك ٢ م)
فان طرح المشور ل ن ح من الجسم الذي قاعدته الشكل اب وق د ك ن السطح
المقابل لها وطرح منه ايضا المشور اغ د فالجسم الباقي اي المتوازي السطوح اح
يعدل الباقي اك

القضية السادسة . ن

اجسام متوازية السطوح على قاعدة واحدة وعلى علو واحد هي متساوية
وان لم تنته خطوطها النوافقة في خط واحد في السطح المقابل القاعدة
ليكن الجسمان المتوازيان السطوح س م وس ف على قاعدة واحدة اب وعلى علو



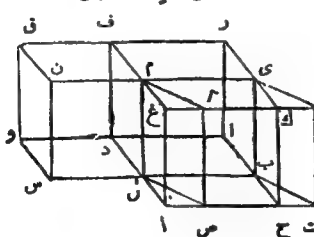
واحد وخطوطها النوافقة اق
اغ ل م ل ف س د
س ي ب ح ب ك غير
منتبهة الى خط واحد كما في
القضية السابقة فالجسمان
س م س ف متساويان
لانها على علو واحد
فالسطح ح ق والسطح ك غ في

سطح واحد واذا اخرج السطح ح ق والسطح ك غ فتقاطع اضلاعها . فلينجزا وليتقاطعا
في ان ا و . فالجسم س ف = س ن (ق هـ ك ٢ مضافات) والجسم س ق = س ن
(ق هـ ك ٢ مضافات) فالجسم س ف = س م (اولية ا ك ا)

القضية السابعة . ن

اجسام متوازية السطوح على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي
متساوية

ليكن الجسمان المتوازيان السطوح س ف و ا ي على علو واحد وعلى قاعدتين



متساويتين ح ل وس د فيها
متساويان

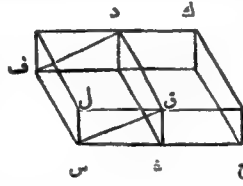
ليوضع الجسمان حتى تكون ج
القاعدتان في سطح واحد .
فلكونها على علو واحد يكون
السطحان المقابلان القاعدتين

ن ف غ ي أيضاً في سطح واحد ونخرج السطوح حتى يصطبع السطحان م ر وب د
وتم الجسم ل ر فهو يعدل الجسم س ف (ق ١ ك ٢ م) وهو أيضاً يعدل اى فالجسم
اى يعدل الجسم س ف (اولية ا ك ١)

الفضية الثامنة. ن.

اجسام متوازية السطوح اذا كانت على علو واحد تكون نسبة بعضها
الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض

ليكن ا ب وس د جسمين متوازي السطوح وعلى علو واحد فنسبة ا ب :
س د :: القاعدة اى :



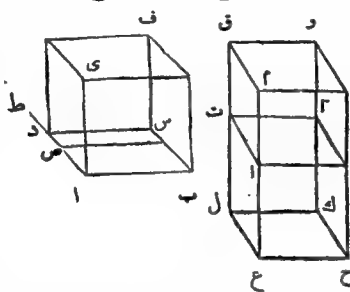
القاعدة س ق
ارسم الشكل
المتوازي الاضلاع ق ح
على الخط المستقيم ق غ

حتى يعدل القاعدة اى (فرع ق ١ ك ٢) والزوايا ق غ ح فلتعدل ل س غ
الجسم المتوازي السطوح غ ك على القاعدة ق ح فيكون ق د واحداً من خطوط
الواقفة فيكون الجسمان س د و غ ك على علو واحد والجسم ا ب يعدل الجسم غ ك
(ق ٢ ك ٢ م) ونسبة ح ق : ق س :: الجسم ح د : الجسم د س (ق ٢ ك ٢ م) والقاعدة
ح ق = اى والجسم غ ك = ا ب فنسبة ا ب : س د :: اى : س ق

فرع اول . يتضح من هذه القضية ان الماثير على قواعد مثلثة الاضلاع وعلى
علو واحد تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض
فرع ثان . اذا كانت جسم متوازي السطوح وموشور على علو واحد فنسبة
احدها الى الاخر كنسبة قاعدة الواحد الى قاعدة الاخر

النضية التاسعة: نـ

اجسام متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كنسبة مسطح
 علو الواحد في مساحة قاعدته الى مسطح علو الآخر في مساحة قاعدته
 ليكن اف و غ و جميع متوازي السطوح. فنسبة اف : غ و : اس :
 س : ف : غ ك : خ ك و



من غ م احد المخطوط
 الواقعة للجسم غ واقطع غ ا
 حتى يعدل س ف او اى
 من الجسم اف ولير بالنفطة
 اسطح يوازي غ ك مثل
 السطح ات ٢ ار فالجسم غ ٢

متوازي السطوح (حده ك ٢ م) وعلوه هو علو اف. ونسبة الجسم اف : الجسم غ و
 في مركبة من نسبة اف : غ ٢ ونسبة غ ٢ : غ و (حده ا ك ٤ م) ونسبة اف : غ ٢
 في كنسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك (ق ك ٨ م) لانها على علو واحد ونسبة الجسم
 غ ٢ : الجسم غ و هي كنسبة غ ا : غ م (ق ك ٢ م) فالنسبة المركبة من نسبة اف :
 غ ٢ ومن نسبة غ ٢ : غ و هي مثل المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك
 والعلو اى : العلو غ م (ق وك ٤) ولكن نسبة اف : غ و هي المركبة من اف : غ ٢
 وغ ٢ : غ و فنسبة اف : غ و هي المركبة من نسبة القاعدة اس : القاعدة غ ك والعلو
 اى : العلو غ م فنسبة اف : غ و : اس : س ف : غ ك : خ ك و

فرع اول. يمكن استعمال خطين مستقيمين نسبة احدهما الى الاخر كنسبة الجسم
 اف الى الجسم غ و. ليوضع الشكل المتوازي الاضلاع ب ص على اب وليفرض
 ان ب ص = غ ك وزاوية من زواياه تعدل ب ا د (ق ك ٤٤ ك ا) واص : ا ط :
 اى : غ م (ق ك ١٢ ك ا) فتكون نسبة ا د : ا ط : الجسم اف : غ و. لان نسبة ا د :
 ا ط مركبة (حده ا ك ٥) من نسبة ا د : اص ونسبة اص : ا ط ولكن نسبة ا د :
 اص هي مثل نسبة الشكل اس : الشكل ب ص او غ ك (ق ك ٦ ك ا) ونسبة
 اص : ا ط هي مثل نسبة اى : غ م فنسبة ا د : ا ط مركبة من نسبة اس : غ ك

ونسبة اى غم (قه كه) ونسبة الجسم اف الى الجسم غ و هي مركبة من ذات
هذه النسب فنسبة اف غ و : ا د : ا ط
فرع ثانٍ . نسبة المواشير بعضها الى بعض كالنسب المركبة من قواعدها في
علوها (فرع ٢ ق ٨ ك ٢ م)

—•—

الفضية العاشرة . ن

اجسام متوازية السطوح في متساوية اذا كانت قواعدها وعلوها
متناسبة بالتكافؤ والاجسام المتوازية السطوح المتساوية تكون
قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ

لتكن نسبة اس : كم :: ك و : اى فاجسم اغ = الجسم ك ق لانه بقويل هذه
النسبة لنا اس \times اى = كم
 \times ك و واس \times اى = اغ
(ق ٩ ك ٢ م) وكم \times ك و
= ك ق
ثم اذا فرض ان اس
 \times اى = كم \times ك و لنا
اس : كم :: ك و : اى

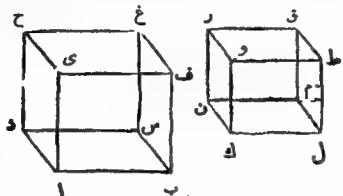
فرع . في المواشير المتساوية تكون قواعدها وعلوها متناسبة بالتكافؤ وبالعكس
اذا كان العلو والقواعد متناسبة بالتكافؤ تكون المواشير متساوية

—•—

الفضية الحادية عشرة . ن

اجسام متشابهة متوازية السطوح تكون نسبة بعضها الى بعض كسبة
كعوب اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض

ليكن $ا غ$ و $ك ق$ جسمين متوازي السطوح و $ا ب$ و $ك ل$ الضلعين المتشابهين
 فنسبة $ا غ : ك ق :: ا ب : ك ل$
 لكون الجسمين متشابهين يكون
 اح و $ك$ ر سطحين متشابهين و $ا ف$
 و $ك ط$ كذلك (حد ٢ ك ٢ م)
 ونسبة $ا ب : ك ل$ و $ا ي : ك و$

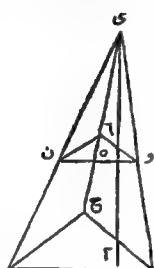
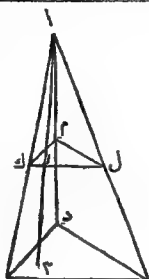


و $ا د : ك ن$ متعوبة (حد ١ ك ٦) ونسبة $ا غ : ك ق$ هي مركبة من نسبة $ا س : ك م$
 و $ا ي : ك و$ ونسبة $ا س : ك م$ هي مركبة من $ا ب : ك ل$ و $ا د : ك ن$ فنسبة $ا غ : ك ق$
 هي مركبة من النسب الثلاث اي نسبة $ا ب : ك ل$ و $ا د : ك ن$ و $ا ي : ك و$ وقد
 تبين ان هذه النسب الثلاث متساوية اذا $ا ب : ك ل :: ا غ : ك ق$ (حد ٢ ك ٥)
 فرع اول . اذا فرض $ا ب : ك ل :: ا غ : ك ق$ (حد ٢ ك ٥) فنكون نسبة
 $ا ب : ن :: ا غ : ك ق$. لان $ا ب : ن = ا ب : ك ل :: ا غ : ك ق$ (حد ٢ ك ٥) اي $ا غ : ك ق$
 فرع ثان . لكون الاجسام المكعبة متشابهة يكون المكعب على $ا ب$: المكعب على
 $ك ل :: ا غ : ك ق$ فنسبة اجسام متوازية السطوح بعضها الى بعض كنسبة كعوب
 اضلاعها المتشابهة بعضها الى بعض
 فرع ثالث . وهكذا يبين ايضا ان الموشورات المتشابهة هي ككعوب اضلاعها
 المتشابهة

القضية الثانية عشرة . ن

هرمان مثلثا الاضلاع على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد اذا
 قطع كل واحد منها بسطح يوازي قاعدته وعلى بعد واحد من
 القاعدتين يكون موضعا التقاطع متساويتين

ليكن $ا ب س د$ ي $ف غ ح$ هرمين مثلثي الاضلاع على قاعدتين متساويتين
 د ب س ح $ف غ$ وعلى علو واحد اي العمود ٢ ا والعمود ٢ من ا و $ي$ على
 القاعدتين ولونقطع احدهما بالسطح $ك ل م$ والآخر بالسطح $و ل$ على بعد واحد من



القاعدتين اي طول العمودين
٢١ و ٢٢. فوضعا التقاطع
اي المثلثان ك ل م ن و
متساويان

السطحان ب د س
ك م ل متوازيان ويلقيهما
السطح ا ب د فالحظان

ب د ك م متوازيان (ق ١٤ غ ف س ب

ك م) وهكذا يبرهن ان د س و م ل متوازيان وب د س يوازيان ك م ل
وليست في سطح واحد فالزاوية ب د س تعدل الزاوية ك م ل (ق ٩ ك م) وعلى
هذا الاسلوب يبرهن ان بقية زوايا المثلثين متساوية كل واحدة لظهيرها فالمثلثان
متشابهان وهكذا ايضا في المثلثين ف غ ح ن و ٦ فهما متشابهان لان الخطين المستقيمين
٢ ١ ١ ك ب يلقيان السطحين المتوازيين ك م ل ب د س فيقطعهما على نسبة
واحدة (ق ١٦ ك م) ونسبة ١ ٢ : ١ ١ :: ب ك : ك ا و ١ ٢ : ١ ١ :: ا ب : ا ك
(ق ١٨ ك ه) وهكذا ايضا ي ٢ : ٥ ي :: ٥ ي : ف ي :: ٥ ي : ف ي فتكون نسبة ا ب : ا ك ::
ي ف : ي ن لان ٢ ١ = ٥ ي و ١ ٢ = ٥ ي ولان المثلثين ا ب س ا ك ل متشابهان

ا ب : ا ك :: ب س : ك ل وايضا

ي ف : ي ن :: ف غ : غ ن فلنا

ب س : ك ل :: ف غ : غ ن و

واذا كانت اربعة خطوط معتقمة متناسبة تكون الاشكال المرسومة عليها متناسبة ايضا
(ق ٢٢ ك ٦) فالمثلث ب س د : المثلث ك ل م :: المثلث ف غ ح : المثلث ن و ٦.
ولكن قد فرض ان ب س د ف غ ح متساويان قانًا ك ل م ن و ٦ متساويان
ايضا (ق ١ ك ه)

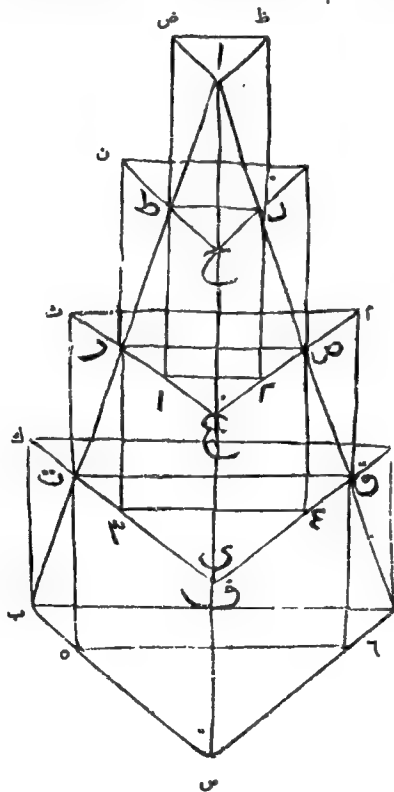
فرع اول. كل موضع يُقطع فيه هرم مثلث الاضلاع على موازاة قاعدته هو
مثلث يشبه قاعدة الهرم وهكذا يبرهن ان الشكل الحادث من قطع كل هرم على
موازاة قاعدته هو شكل يشبه بقاعدة الهرم

فرع ثان. اهرام كثيرة الاضلاع وهي على علو واحد وعلى قواعد متساوية تكون

الاشكال المحاذية من قطعها على بعد واحد من القواعد متساوية

القضية الثالثة عشرة. ن

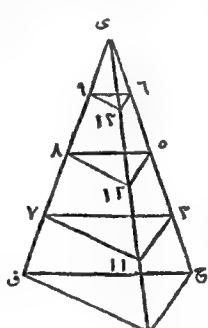
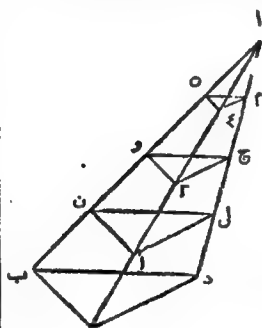
يمكن ان ترسم عدة مواشير على علو واحد محيطة بهرم حتى يكون
مجمع المواشير اعظم من الهرم بمقتلر جسم اصغر من جسم مفروض
ليكن ا ب س د هـ و ا الجسم المفروض فقد يمكن ان يرسم عدة مواشير محيطة



ف ت ق و غ ر ص و ح ط ذ فهي متشابهة بعضها لبعض وللناعدة ب س د (ق ١٢ ك ٢ فرع ١ م) ثم ارسم من ب الخط ب ك حتى يوازي س ف ويلاقي ف ت بعد اخراجه في ك وهكذا دل حتى يلاقي ف ق في ل وارسم ك ل فيكون ك ب س د ل ف موشوراً (جد ٤ ك ٢ م) وعلى هذا القياس اصنع الموشورات م ورو و ط ظ . اخرج ث ت الى ه و م ق الى ٦ وارسم الخط ه ٦ فيكون ه س ٦ ق ف ت موشوراً يعدل الموشورات م (ق ٨ ك ٢ فرع ١ م) وعلى هذا القياس اصنع الموشورات ٢ ص = رو وا ذ = ط ظ فجميع الموشورات الداخلية ه ق و ٢ ص وا ذ = جميع ت م ورو و ط ظ اي جميع الخارجية الآ ب ل فيكون ب ل فضلة الموشورات الداخلية والخارجية وب ل انما هو اصغر من الموشور على القاعدة ب س د وعلى علو س ي الذي يعدل الجسم المفروض ز . فضلة الموشورات الخارجية والداخلية هي اصغر من الجسم المفروض ز وهذه الفضلة انما هي اعظم من فضلة الموشورات الخارجية والهرم اب س د لان الهرم اعظم من جميع الموشورات الداخلية فبالاخرى تكون فضلة الموشورات الخارجية والهرم اصغر من الجسم المفروض ز

الفضية الرابعة عشر . ن

اهرام على قواعد متساوية وعلى علو واحد هي متساوية
ليكن اب س د ي ق غ ح هرمين على قاعدتين متساويتين ب س د



ق غ ح وعلى
علو واحد
اي العمود
من الرأسين
او ي على
القاعدتين
فالهرمان
متساويان
والا

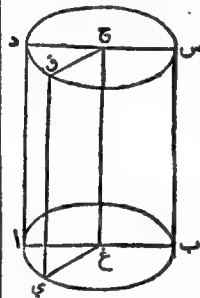
فليكن ي ق غ ح اعظم من آ ب س د بمثلار جسم ز . فيمكن ان تُرسم عدة موشورات

فرع أول. كل هرم هو تلك موشور على قاعدة تعدل قاعدته وعلى علوه يعدل علوه لانه ولأن كانت قاعدته غير مثثة يمكنها ان تقسم الى مواشير لها قواعد مثثة فرع ثان. نسبة اهرام على علو واحد بعضها الى بعض كنسبة قواعدها بعضها الى بعض (ق ٨ ك ٢ فرع ١ م)

— ١٠٠١ —

الفصل السادسة عشرة. ن

اذا فرضت نقطة في محيط قاعدة اسطوانة ورسم منها خطاً مستقيم عموداً على سطح القاعدة يكون الخط كله في سطح الاسطوانة لكن ا ب س د اسطوانة محيط قاعدتها ا ب ولتكن د ق س الدائرة التي



تقابل القاعدة وليكن غ ح محورها. وتُفرض في محيط القاعدة النقطة ي ولرسم منها الخط المستقيم ق عموداً على سطح الدائرة ا ب. فالخط ي ق كله في سطح الاسطوانة، ليلاني الخط ي ق السطح المقابل بقاعدة د ق س في النقطة ق. ارم ي غ وق ح. وليكن اغ ح د الشكل القائم الزوايا الذي بدورانه رسمت الاسطوانة (حد ١٤ ك ٢ م)

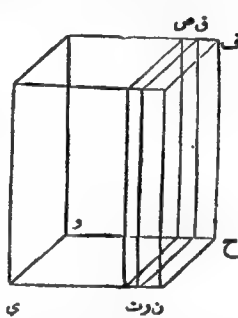
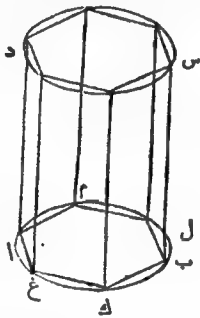
لكون الخط غ ح عموداً على ا غ ا الذي

بدورانه رسمت الدائرة ا ب فهو عمود على جميع الخطوط المستقيمة في سطح تلك الدائرة التي تلاقيه في غ. فهو عمود على سطح الدائرة ا ب. والخط ي ق هو عمود على ذلك السطح فالخط ي ق يوازي غ ح (ق ٦ ك ٢ م) وهما في سطح واحد والسطح المار بالخطين ي ق غ ح يقطع السطحين المتوازيين د ق س ا ب في الخطين المستقيمين ي غ ق ح فهما متوازيان (ق ١٤ ك ٢ م) فالشكل ي ق ح غ متوازي الاضلاع والزاوية ي غ ح منه قائمة فالشكل قائم الزوايا ويعدل القائم الزوايا ا ح لان ي غ = اغ. فانا دار الشكل ا ح حتى يوافق الخط اغ الخط ي غ فالشكلان ح ي ح يوافقان الخط ا د يوافق الخط ي ق ولكن ا د هو في سطح الاسطوانة فيكون ي ق ايضا في سطح الاسطوانة

القضية السابعة عشرة. ن

اسطوانة وجسم متوازي السطوح على قاعدتين متساويتين وعلى علو واحد هما متساويان

لكن اب س د اسطوانة وليكن ي ف جسماً متوازي السطوح والقاعدة اغ ب



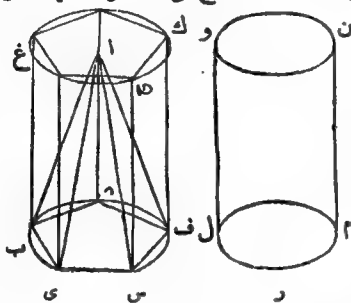
فلتعدل القاعدة
ي ح وليكن علو
الجسمين واحداً
فلا اسطوانة
ا ب س د
تعدل الجسم
ي ف
والا فتكن

الاسطوانة اصغر من الجسم ي ف . ولينصل من ي ف جزأ ي ق يعدل الاسطوانة
ا ب س د . وذلك بواسطة سطح ت ق الذي يوازي ن ف ثم ارم في دائرة اغ ب
شكلاً كبير الاضلاع اغ ك ب ل م ويكون الفرق بينه وبين الدائرة اقل من الشكل
ت ح (ق ٤ ك ا فرع ا م) وانصل من ي ح جزأ و ر = اغ ك ب ل م . فتقع
النقطة ر بين ت و ن ثم ارم على اغ ك ب ل موشوراً اغ ب س د على علو
الاسطوانة فيكون اصغر منها (ق ١٦ ك ٢ م) ثم لبر السطح ر ص في النقطة ر وليوازي
ن ف فيقطع من ي ف الجسم ي ص = الموشور اغ ب س د (ق ٨ ك ٢ فرع ٢ م)
لانها متساويان في القاعدة والعلو والموشور هو اصغر من الاسطوانة وفرض ان
الاسطوانة = ي ق اذا ي ص هو اصغر من ي ق وذلك محال فلا يمكن ان تكون
الاسطوانة اصغر من ي ف . وعلى هذا الاسلوب يبرهن انها ليست اكبر من ي ف

الفئة الثامنة عشرة . ن

إذا كانت اسطوانة ومخروط على قاعدة واحدة وعلى علو واحد
فالمخروط ثلث الاسطوانة

ليكن المخروط ا ب س د والاسطوانة ب ف ك غ على قاعدة واحدة في الدائرة



ب س د وعلى علو واحد
هو العمود من ا على سطح
القاعدة ب س د فالمخروط
ا ب س دائما هو ثلث
الاسطوانة ب ف ك غ
والا فليكن المخروط
ا ب س د ثلث اسطوانة
اخرى ل م ن و طولها مثل

علو الاسطوانة ب ف ك غ ولكن القاعدة ل م ليست مثل القاعدة ب س ف
ولو لا لئكن ب س د اكبر من ل م

ثم لان الدائرة ب س د اكبر من الدائرة ل م فيمكن ان يرسم في ب س د
شكل كثير الاضلاع فضلته اصغر من فضلة ب س د ل م (ق ٤ ك ا م)
ليكن ب ي س ف د ذلك الشكل وليبين علوه الهرم ا ب ي س ف د والموشور
ب س ف ك ح غ

فلكون الشكل الكثير الاضلاع ب ي س ف د اعظم من الدائرة ل م يكون
الموشور ب س ف ك ح غ اعظم من الاسطوانة ل م ن و لان لما علوا واحدا ولكن
قاعدة الموشور اكبر من قاعدة الاسطوانة. ولكن الهرم ا ب ي س ف د هو ثلث الموشور
ب س ف ك ح غ (ق ١١ ك ٢ م) فهو اعظم من ثلث الاسطوانة ل م ن و . وقد
فرض ان المخروط ا ب س د هو ثلث الاسطوانة ل م ن و . فالهرم ا ب ي س ف د
اعظم من المخروط ا ب س د وهو ايضا اصغر منه وذاك محال فالمخروط ا ب س د
ليس اقل من ثلث الاسطوانة ب ف ك غ . وعلى هذا الاسلوب اذا ريس شكل كثير

غ و ح ت و س ب وايضاً ص ٢ و ٧ و ٦ عمودية على المخطوط المذكورة
 فبعد اتمام هذا الرسم ان دار الجميع حول س د فالاشكل المتوازية الاضلاع والقائمة
 الزوايا ق ٨ و غ ٥ و ح ٩ تُحْدِث بدورانها اساطين (حد ١٤ ك ٢ م) في نصف
 الكرة ب د ا والشكل د ن ق ٦ غ ٧ ح ص تُحْدِث اساطين محيطة بالمخروط
 ث س ي. فيمكن ان يبرهن كما في المواشير المرسومة في هرم (ق ١٢ ك ٢ م) ان مجموع
 كل الاساطين في نصف الكرة هو اقل من نصف الكرة بمقدار جسم اصغر من
 الاسطوانة الحادثة من دوران ح ب اي اصغر من ع لان ح ب قد قُرِضَ اصغر من
 ع. وهكذا يبرهن ايضاً ان مجموع الاساطين المحيطة بالمخروط ث س ي هو اكبر من
 المخروط بمقدار جسم اصغر من الاسطوانة الحادثة من دوران د ن اي مجسم اصغر
 من ع. فلكون مجموع الاساطين المرسومة في نصف الكرة مع جسم اصغر من ع يعدل
 نصف الكرة ولكون مجموع الاساطين المحيطة بالمخروط يعدل المخروط مع جسم اصغر
 من ع فباضافة اشياء متساوية الى اشياء متساوية مجموع هذه الاساطين مع جسم اصغر
 من ع يعدل مجموع نصف الكرة والمخروط مع جسم اصغر من ع. ففضلة مجموع كل
 الاساطين ومجموع نصف الكرة والمخروط يعدل فضلة جسمين كل واحد منها اصغر
 من ع فلا بد ان تكون هذه الفضلة ايضاً اصغر من ع

القضية العشرون . ن

اذا قُرِضَ ما قُرِضَ في القضية السابقة فمجموع الاساطين في نصف
 الكرة والمحيط بالمخروط يعدل اسطوانة علوها وقاعدتها مثل علو
 نصف الكرة وقاعدته

ليتم الرسم كما في القضية السابقة فمجموع الاساطين الحادثة من دوران اشكال
 ح ٩ غ ٥ ق ٨ اي الواقعة في نصف الكرة مع الحادثة من دوران الاشكال
 ح ص غ ٧ ق ٦ و د ن اي المحيط بالمخروط يعدل الاسطوانة الحادثة من دوران
 الشكل ب د. لكن ل نقطة التقاء غ و محيط الدائرة فلان س غ ل قائمة فان
 أوصل بين س ول فالنقطتان المرسومتان على نصف القطر س غ و غ ل تعدلان
 الدائرة المرسومة على نصف القطر س ل او غ و (ق ٦ ك ١ فرع ٢ م) وس غ =

غ ٢ لان س د = دى فالداعرتان المرسومتان على نصف القطر غ ٢ وغ ل معاً
تعدلان الدائرة المرسومة على نصف القطر غ و اى الداعرتان المرسومتان بدوران
غ ٢ غ ل على نقطة غ ها معاً تعدلان الدائرة المرسومة بدوران غ و على تلك
النقطة . فالاسطوانتان الواقعتان على الداعرتين المذكورتين اذ كان لهما علو واحد
غ ح تعدلان القائمة على الدائرة الاخرى التي لها ايضاً علو غ ح . فالاساطين المحاذية
من دوران غ ٥ وغ ٧ تعدل المحاذية من دوران غ ت وهكذا يبرهن في الجميع
فالاساطين المحاذية من دوران ح ٩ غ ٥ ق ٨ وح ص غ ٧ ق ٦ ود ن تعدل
المحاذية من دوران ب د اى تعدل اسطوانة طولها وقاعدتها مثل علو نصف الكرة
وقاعدتها

القضية الحادية والعشرون . ن

الكرة هي ثلثا الاسطوانة المحيطة بها

ليرسم كما في القضية السابقة . فان لم يكن نصف الكرة الحادث من دوران
ب د س ثلثي الاسطوانة المحاذية من دوران ب د فلنفرضه اكبر من ذلك بمقدار
جسم ع . ثم لان المخروط الحادث من دوران س دى هو ثلث الاسطوانة المشار اليها
(ق ١٨ ك ٢) فيكون نصف الكرة والمخروط معاً اكبر من الاسطوانة بمقدار جسم
ع . ولكن هذه الاسطوانة تعدل مجموع الاساطين المحاذية من دوران الاشكال ح ص
غ ٥ الخ (ق ٢٠ ك ٢) فمجموع نصف الكرة والمخروط هو اكبر من مجموع هذه
الاساطين بمقدار جسم ع وذلك محال لانه قد تبرهن (ق ١٩ ك ٢) ان فضلة مجموع
نصف الكرة والمخروط ومجموع الاساطين يعدل جسماً اصغر من ع فنصف الكرة
يعدل ثلثي الاسطوانة المحاذية من دوران ب د فكل الكرة ثلثا الاسطوانة المحاذية
من مضاعف ب د اى ثلثا الاسطوانة المحيطة بها

فنسبة اب س : اربع زوايا قائمة :: القوس اس : المحيط ا د ي ف
 فرع . الزوايا المتساوية عند مراكز دوائر مختلفة بين اقواسها ذات النسبة التي
 بين محيطات الدوائر . الزاوية اب س عند مركز الدائرتين ا د ف غ ح ك ويقابلها
 القوس اس من الواحدة والقوس غ ح من الاخرى ونسبة اس الى محيط الدائرة
 ا د ف كسبة اب س الى اربع زوايا قائمة ونسبة غ ح الى محيط الدائرة غ ح ك
 كسبة اب س الى اربع زوايا قائمة

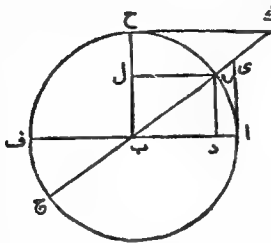


حدود

١ اذا تقاطع خطان مستقيمان في مركز دائرة فالقوس الواقع بينهما هو قياس
 الزاوية المحاذية بينهما . فالقوس اس هو قياس الزاوية اب س
 ٢ اذا انقسم محيط دائرة الى ٣٦٠ قسمًا متساويًا فكل قسم يُسمى درجة اذا
 انقسمت الدرجة الى ستين قسمًا متساويًا فكل قسم يُسمى دقيقة والدقيقة تنقسم الى
 ستين قسمًا متساويًا تسمى ثواني والثانية الى ستين قسمًا متساويًا تسمى ثوانك وهكذا الى
 ما لا نهاية له . والدرجات والدقائق والثواني الى آخره في قوس هي نفس الدرجات
 والدقائق والثواني في الزاوية التي يقيسها ذلك القوس
 فرع أول . نسبة قوس الى المحيط الذي هو قسم منه كسبة درجاته وجزأه
 درجاته الى ٣٦٠ ونسبة زاوية الى اربع زوايا قائمة كسبة درجات قوسها وجزأه
 درجاته الى ٣٦٠
 فرع ثان . الاقواس التي تقيس زاوية واحدة هي متائلة في عدة درجاتها وجزأه
 درجاتها

الدرجات والدقائق والثواني الخ في قوس او زاوية تكتب هكذا ٤٩ ٢٦
 ٤٢ الخ وتقرأ ٤٩ درجة و٢٦ دقيقة و٤٢ ثانية و٤٢ ثالثة الخ
 ٣ اذا عدلت زاويتان معًا قائمتين فكل واحدة تسمى من الاخرى وهكذا في
 قوسين عدلا معًا نصف دائرة فكل واحد منها منم الآخر

٤ الخط المستقيم المرسوم من طرف قوس مثل المخط ن د عمودًا على القطر
 المار بالطرف الآخر من القوس هو جيب القوس ان او جيب الزاوية اب ن التي



كان القوس ان قياسها

فرع أول . جيب ربع دائرة او قائمة
يعدل نصف القطر

فرع ثان . جيب قوس هو نصف
وتر مضاعف القوس كما يتضح من اخراج
الجيب حتى يلاقي المحيط

٥ القسم من القطر الواقع بين الجيب والمحيط مثل د ا يسمى سهم الجيب
للقوس ان او للزاوية ا ب ن

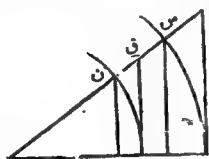
٦ الخط المستقيم الذي يمس طرف قوس مثل الخط ي ا الذي يمس طرف
القوس ن ا ويلقي القطر المار بطرفه الاخر مثل ب ي يسمى ماس القوس ان او
الزاوية ا ب ن

فرع ثالث . ماس نصف قائمة يعدل نصف القطر
٧ الخط المستقيم ب ي بين المركز وطرف الماس يسمى قاطع القوس ن ا او
الزاوية ا ب ن

فرع رابع للحد الرابع والسادس والسابع . جيب زاوية ما مثل ا ب ن وماسها
وقاطعها هو ايضا جيب وماس وقاطع لهما ن ب ف
الامر واضح من الحد الرابع ان ن د هو جيب الزاوية ن ب ف . اخراج ن ب
حتى يلاقي المحيط في ج . فيتضح ان ي ا هو ماس وب ي قاطع للزاوية ا ب ج او
ن ب ف (حد ٦ و ٧)

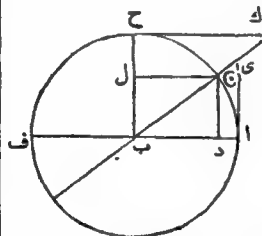
فرع رابع للحد الرابع والخامس والسادس والسابع . نسبة جيب قوس ما وسهم جيبه
وماسه وقاطعه التي تقس زاوية ما الى جيب قوس آخر وسهم جيبه وماسه وقاطعه
التي تقس تلك الزاوية ذاتها كسبة نصف قطر القوس الاول الى نصف قطر
القوس الثاني

ليكن ا ب ن ومن قياسين للزاوية ا ب ن حسب الحد الاول وليكن س د
الجيب ود ا سهم الجيب وي ا الماس وب ي القاطع للقوس ا س (حد ٤ و ٥ و ٦ و ٧)
وليكن ن ر الجيب و ر م سهم الجيب و م ق الماس وب ق القاطع للقوس م ن فليكون
ن ر ق م س د ي متوازية تكون نسبة س د : ن ر : نصف القطر س ب :



نصف القطر ن ب ونسبة اى : م : ق :: نصف
 القطر ا ب : نصف القطر م ب وبى : ب : ق
 :: ا ب : م ب ولأن ب س : ب د :: ب ن : ب ر
 لو ب ا : ب د :: ب م : ب ر فبالقلب والمبادلة
 ا د : م ر :: ا ب : ب م . فالفرع واضح . وإذا
 اصطبعت جداول دالة على نسبة الجيب وسهم الجيب والمماس والقاطع لزواية ما الى
 نصف قطر مفروض فهي تدل ايضا على نسبة هذا الجيب وسهمه الى آخره من تلك
 الزواية الى اى نصف قطر فرض . وقد جرت العادة في تلك الجداول ان يحسب
 نصف القطر واحداً او حلقة من السلسلة ١٠ ١٠٠ ١٠٠٠ الى آخره وسهاتي
 ايضا ذلك في موضعه

٨ . فضلة زاوية ما وزاوية قائمة نسي كمالها وفضلة قوس ما وربع دائرة يسمى
 كماله . فاذا كان ب ح عموداً على ا ب تكون ك
 الزاوية ح ب ن كمال الزاوية ا ب ن
 والقوس ح ن كمال القوس ن ا والزواية
 ح ب ن كمال الزاوية المنفرجة ف ب ن
 والقوس ح ن كمال القوس ف ح ن



٩ . نظير الجيب ونظير المماس ونظير
 القاطع لزواية هي الجيب والمماس والقاطع لكالم تلك الزاوية . فاذا كان ن د جيب
 الزاوية ا ب ن وى ا ماسها وبى قاطعها يكون ن ل نظير الجيب وك ح نظير
 المماس وب ك نظير القاطع لها

فرع أول . نصف القطر هو متناسب متوسط بين المماس ونظير المماس لزواية
 ما فماس ا ب ن \times نظير ماس ا ب ن = مربع نصف القطر
 لأن ح ك وب ا متوازيان فالزاويتان ح ك ب ا ب ن متساويتان وك ح ب
 وب اى قائمتان فالمثلثان ب اى ب ح ك متشابهان واى : ا ب :: ب ح : ا ب
 ا ب : ح ك

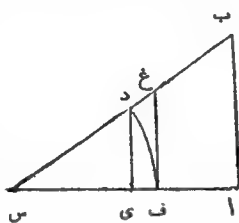
فرع ثان . نصف القطر متناسب متوسط بين نظير الجيب والقاطع لزواية
 ما اى نظير جيب ا ب ن \times قاطع ا ب ن = مربع نصف القطر

لان د يوازي ا ف نسبة ب د : ب ن او ب ا : ب ا : ب ي
تنبيه . لاجل الاختصار يدل على نصف القطر هكذا $\frac{ق}{٢}$ وعلى
الجيب هكذا ج وعلى المماس هكذا م وعلى القاطع هكذا ق ا وعلى سهم
الجيب هكذا س ج وعلى نظير الجيب والمماس والقاطع هكذا ن ج ن م ن ق ا

القضية الاولى . ن .

في مثلث بسيط قائم الزاوية تكون نسبة الوتر الى احد الضلعين
كـ نصف القطر الى جيب الزاوية المقابلة ذلك الضلع . ونسبة ضلع
الى الضلع الآخر كنسبة نصف القطر الى مماس الزاوية المقابلة ذلك
الضلع

ليكن ا ب س مثلثا بسيطا قائم الزاوية وب س وتره . اجعل س مركزا و س د
مثلا نصف قطري وارسم القوس د ي . ارم
د ف عمودا على س ي ومن ي ارم المماس
ي غ الذي يلاقي س ب في غ فيكون د ف
جيبا و غ ي مماسا للقوس د ي والزاوية
عند س



المثلثان د ف س ب ا س متساويا
الزوايا لان د ف س وب ا س قائمتان والزاوية عند س مشتركة بين المثلثين .
فنسبة س ب : ب ا : س د : د ف و س د هو نصف القطر و د ف جيب الزاوية
عند س (ح د ٤) فنسبة س ب : ب ا : $\frac{ق}{٢}$: ج س
ولان ي غ مماس الدائرة في ي فالزاوية ي غ س قائمة وتعدل ب ا س والزاوية
عند س مشتركة بين المثلثين ي غ س ب ا س فها متساويا الزوايا ونسبة س ا :
ا ب : س ي : ي غ و س ي نصف قطري و غ مماس الزاوية عند س فنسبة

س ا: اب :: ق: بم س

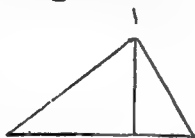
فرع أول . نسبة نصف القطر الى قاطع الزاوية عند س كنسبة الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى الوتر

لان س غ قاطع الزاوية عند س (حد ٧) والمثلثان س غ ي س ب ا متساويا الزوايا فنسبة س ا: س ب :: س ي: س ع او س ا: س ب :: ق: قاس

فرع ثان . حسب القضية السابقة وفرعها لو فرض نصف القطر واحداً لكان ج س = $\frac{ا ب}{ب س}$ وم س = $\frac{ا ب}{ا س}$ وقاس = $\frac{ب س}{ا س}$ ولان ج س = نج ب

(لان الزاوية عند ب كمال الزاوية عند س) فلما نج ب = $\frac{ا ب}{ب س}$ ونج س = $\frac{ا ب}{ب س}$

فرع ثالث . في كل مثلث اذا رسم عموداً من احدى زواياه الى الضلع المقابل تكون نسبة احد قسبي ذلك الضلع الى القسم الآخر منه كنسبة ماس احدى الزوايا على جانب العمود الى



ماس الاخرى

في المثلث اب س لرسم ا د عموداً من ا على س د ب س فكل من المثلثين ا د ب ا د س ذو قائمة ونسبة ا د: د س :: ق: بم

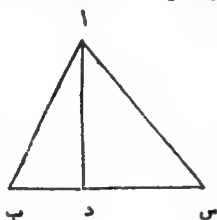
س ا د و ا د: ب د :: ق: بم د ا ب وبالمساواة د س: د ب :: م س ا د: م ب ا د

تعليقة . يسمل علينا حفظ هذه القضية بلاحظة امرين اولهما انه في مثلث ذي قائمة اذا جعل الوتر نصف قطر يصير كل من الضلعين جيب الزاوية التي تقابله . والثاني انه اذا جعل احد الضلعين نصف قطر يصير الضلع الآخر ماساً للزاوية التي تقابله والوتر قاطعاً لها

القضية الثانية . ن

نسبة اضلاع مثلث بسيط بعضها الى بعض كنسبة جيوب الزوايا التي تقابل تلك الاضلاع بعضها الى بعض

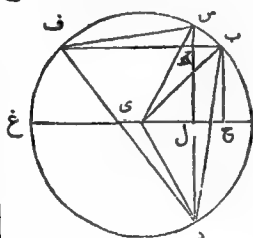
ليكن $اب$ $س$ مثلثاً ومن الزاوية $ا$ رسم $اد$ عموداً على $ب س$. فالمثلث $اب د$



له قائمة عند $د$ ونسبة $اب : اد :: ق : ج ب$
ولهذا السبب ايضاً $اس : اد :: ق : ج س$
وبالقلب $اد : اس :: ج س : ق$ وبالقلب
والمساواة $اب : اس :: ج س : ج ب$. وهكذا
يبرهن ان $اب : ب س :: ج س : ج ا$

القضية الثالثة . ن .

اذا فرض قوسان من دائرة تكون نسبة مجموع جيبهما الى فضله
جيبهما كنسبة ماس نصف مجموعهما الى ماس نصف فضلهما
ليكن $اب$ و $اس$ قوسين من الدائرة $اب س د$ والنقطة $ي$ مركزها و $اي غ$



قطرها فنسبة $جاس + جاب : جاس - جاب :: م : م$
 $(اس + اب) : (اس - اب) :: م : م$
 $ارم ب ف$ حتى يوازي $اي غ$
وبلاني المحيط في $ف$ وارسم $ب ح$ و $س ل$
عمودين على $اي$. فها جيبا القوسين $اب$
و $اس$. اخرج $س ل$ حتى يلاقي المحيط في $د$
وارسم $د ف د ي د ب ف س ي ب ي س$

لكون $ي ل$ قدر $ر$ من المركز عموداً على $س د$ فهو نصف $س د$ في النقطه $ل$
والقوس $س ا د$ في $ا و د ل = ل س$ الذي هو جيب القوس $اس$. و $ب ح$ اول ك
جيب القوس $اب$ فالخط $د ك$ مجموع جيبَي القوسين المقروصين و $س ك$ فضلتهما
و $د اب$ مجموع القوسين و $ب س$ فضلتهما. وفي المثلث $د ف س$ لكون $ف ك$ عموداً
على $د س$ تكون نسبة $د ك : ك س :: م د ف ك : م س ف ك$ (فرع ثالث ق ١)
ولكن ماس $د ف ك = م : ق$ قوس $ب د$ لان $د ف ك$ نصف $د ي ب$ (ق ٢٠ ك ٣)

فقياسها نصف ب د . ولما السبب ايضا م س ف ك = م $\frac{1}{2}$ ب س . فنسبة د ك :
ك س :: م $\frac{1}{2}$ ب د : م $\frac{1}{2}$ ب س . ولكن د ك مجموع جيبى القوسين اب واس
وك س فضلتهما . وب د مجموع القوسين اب واس وب س فضلتهما . فنسبة جاس
+ جاب : جاس - جاب :: م $\frac{1}{2}$ (اس + اب) : م $\frac{1}{2}$ (اس - اب)

فرع ^١اول . لكون س ل نظير جيب اس وس ح نظير جيب اب يكون
ف ك مجموعها وك ب فضلتهما . لان ف ك = $\frac{1}{2}$ ف ب + س ل = س ح + س ل
وك ب = ل ح = س ح - س ل ونسبة ف ك : ك ب :: م ف د ك : م ب د ك
وماس د ف ك = م ف د ك لان د ف ك كمال ف د ك فتكون نسبة ف ك :
ك ب :: م د ف ك : م ب د ك اوف ك : ك ب :: م $\frac{1}{2}$ القوس د ب : م $\frac{1}{2}$ القوس
ب س . اي نسبة مجموع نظير الجيبين للقوسين الى فضلة نظير الجيبين كنسبة نظير
الماس لنصف مجموع القوسين الى ماس نصف فضلتهما

فرع ^٢ثاني . في المثلث القائم الزاوية ف ك د نسبة ف ك : ك د :: $\frac{1}{2}$ م د ف ك
ولكن ف ك = نجاب + نجاس وك د = جاب + جاس وم د ف ك =
م $\frac{1}{2}$ (اب + اس) فنسبة نجاب + نجاس : جاب + جاس :: $\frac{1}{2}$ م
م $\frac{1}{2}$ (اب + اس)

وهكذا بواسطة المثلث ف ك س يبرهن ان نجاب + نجاس : جاس -
جاب :: $\frac{1}{2}$ م : م $\frac{1}{2}$ (اب - اس)

فرع ^٣ثالث . اذا كان مجموع القوسين اب واب 90° فماس نصف فضلتهما اي
ماس 90° يماثل نصف القطر . والقوس ب س لكونه فضلة د س ود ب او فضلة
د ب و 90° فنصف القوس ب س يماثل فضلة نصف د س ونصف د ب او فضلة
اس و 90° . فاذا كان مجموع قوسين 90° تكون نسبة مجموع جيبى القوسين الى
فضلتهما كنسبة نصف القطر الى ماس فضلة احدهما و 90°

القضية الرابعة . ن

نسبة مجموع ضلعي مثلث الى فضلها كخماس نصف مجموع الزاويتين
المقابلتين للضلعين الى ماس نصف فضلها

ليكن ab س مثلثا بسيطا فنسبة $s + a + b : s - a - b :: m + \frac{1}{2}b : m - \frac{1}{2}b$ (س)



لأن (ق ٢) $s : a + b :: جب : جس$ ولذلك
(ق ٤) $s + a + b : s - a - b :: جب + جس : جب - جس$. وحسب القضية السابقة $جب + جس : جب - جس :: m + \frac{1}{2}b : m - \frac{1}{2}b$ (س)
فإذا (ق ١) $s + a + b : s - a - b :: m + \frac{1}{2}b : m - \frac{1}{2}b$ (س)

القضية الخامسة . ن

إذا رُسم عمودٌ من زاوية مثلث على القاعدة فنسبة مجموع قسي القاعدة
الى مجموع الضلعين الآخرين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة قسي
القاعدة

لأنه حسب (ق ٦) القائم الزوايا مسطح مجموع التسمين في فضلها يعدل
القائم الزوايا مسطح مجموع الضلعين في فضلها فحسب (ق ٦) $s : a + b :: s : a + b$ نسبة مجموع
التسمين الى مجموع الضلعين كنسبة فضلة الضلعين الى فضلة التسمين

القضية السادسة . ن

في كل مثلث نسبة مضاعف القائم الزوايا مسطح ضلعين من اضلاعه
الى فضلة مجموع مربعيها ومربع القاعدة كنسبة نصف القطر الى نظير
جيب الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن $اب س$ مثلثاً فنسبة القائم الزوايا $١٢ اب س \times$ $١٢ اب س$: $(١٢ اب س + ٢ اب س) -$

$اس$: $\frac{ق}{٢}$: نجب



من المرماد عموداً على $ب س$. فضلة المربعين

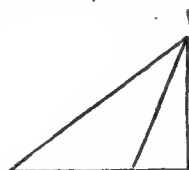
على $اب س$ وب $س$ والمربع على $اس$ يعدل $٢ اب س \times$

$ب د$ (ق ١٢ و $١٢ ك$) ولكن $ب س \times$ $١٢ اب س$:

$ب س \times$ $ب د$: $ب ا$: $ب د$: $\frac{ق}{٢}$: نجب . فإذا $٢ اب س \times$ $١٢ اب س$:

$٢ اب س \times$ $ب د$: $\frac{ق}{٢}$: نجب و $٢ اب س \times$ $ب د$ هو فضلة $اب + ب س$

و $اس$ فإذا $١٢ اب س \times$ $ب س$: $(١٢ اب س + ٢ اب س) -$ $اس$: $\frac{ق}{٢}$: نجب



فرع . اذا فرض $\frac{ق}{٢} = ١$ فلنا $ب د = ١$

$ب ا \times$ نجب (ق ١) و $٢ اب س \times$ $ب ا \times$ نجب

$ب = ٢ اب س \times$ $ب د$ فاذا كانت $ب$ حادة لنا

$٢ اب س \times$ $ب ا \times$ نجب = $ب س + ب ا$ -

$اس$ واذا اضيف $اس$ الى الجانين نصير $اس + د س$

$٢ نجب \times$ $ب س \times$ $ب ا = ب س + ب ا$ ويطرح $٢ نجب \times$ $ب س \times$ $ب ا$ من

الجانين نصير $اس = ب س - ٢ نجب \times$ $ب س \times$ $ب ا + ب ا$ فاذا $اس =$

$٢ اب س - ٢ نجب \times$ $ب س \times$ $ب ا + ب ا$

واذا كانت $ب$ منفرجة يبرهن على هذا الاسلوب ان $اس = ٢ اب س + ٢ نجب$

$ب \times$ $ب س \times$ $ب ا + ب ا$

القضية السابعة . ن

نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا

مسطح الضلع الآخر مع فضلة الضلعين في ذلك الضلع الأفضلة

الضلعين كنسبة مربع نصف النظر الى مربع جيب نصف الزاوية

الواقعة بين الضلعين

لیکن اب س مثلاً قاعدتہ ب س و اب اطول ضلعیہ فنسبۃ ۴ اب X اس :

$$X((b-a) + b)$$

(پ س) - (اب - اس) ::

ق ۲: (جواب اس)

الفصل الثامنة. ن.

نسبة اربعة امثال القائم الزوايا مسطح ضلعي مثلث الى القائم الزوايا مسطح مجتمع الضلعين مع القاعدة في مجتمع الضلعين الا القاعدة كنسبة مربع نصف القطر الى مربع نظير جيب نصف الزاوية الواقعة بين الضلعين

ليكن ا ب س مثلثا قاعدة ب س و ا ب اطول الضلعين الآخرين فنسبة

$$٤ ا ب \times ا س : (ا ب + ا س) +$$

$$ب س (ب س) \times (ا ب + ا س - ب س) :$$

$$ق ا : (ا ب \times ا س)$$

اجعل س مركزا و ب نصف

قطر وارسم الدائرة ب ل م محيطها

يلقي س ا بعد اخراجه في ل وم.

اخرج ال الى ن حتى ان ا ن = ا ب

واجعل ا د = ا ب ثم ارسم ا ي عمودا

على ب د . ارسم ب ن وليلاق

المحيط ايضا في ف وليكن س وعمودا

على ب ن وليلاق ا ي في ق

الامر واضح ان م ن = ا ب + ا س + ب س و ل ن = ا ب + ا س -

ب س . ولان ب د قد تنصف في ي و د ن قد تنصف في ا فالخط ب ن يوازي

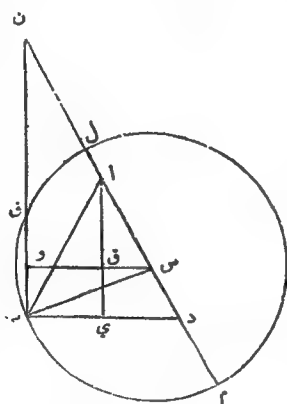
ا ي فهو عمود على ب د والمثلثان د ا ي د ن ب متساويا الزوايا و د ن = ا د

$$و ب ن = ا ي و ب ف = ا ب و = ق ا ي و ف ن = ا ق$$

راكون ا ق س ا ي د متساويي الزوايا تكون نسبة ا س : ا د : ا ق : ا ي

والاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علو واحد هي كتواضعها

بعضها الى بعض (ق ا ك ٦) فنسبة ا س : ا د : ا ق : ا ي : ا ي



وبالمبادلة اس X اد : اق X اى :: اد : اى و اس X اد : اق = اى ::
 اد : اى . ولكن اق X اى = اق X اى = ف X ن ب = م X ن ل
 فاذا اس X اد : م X ن ل :: اد : اى ولكن اد الى اى :: ف : نج د اى =
 نج $\frac{1}{3}$ ب اس (ق ١). فاذا اس X اد : م X ن ل :: ف : نج $\frac{1}{3}$ ب اس (٢)
 و اس X اد هواربعة امثال الناقم الزوايا مسطح اس X اب (لان اد = اب)
 وم ن X ن ل هو الناقم الزوايا مسطح الضلعين مع القاعدة في الضلعين الا القاعدة
 فرع أول. اذا $\frac{2}{3}$ اس X اب : م X ن ل :: ف : نج $\frac{1}{3}$ ب اس
 فرع ثان. حسب القضية السابقة اس X اب : (ب س + (اب - اس)) X
 (ب س - (اب - اس)) :: ف : نج $\frac{1}{3}$ ب اس (٢) وقد تبرهن في هذه القضية
 ان اس X اب : (اب + اس + ب س) X (اب + اس - ب س) ::
 ف : نج $\frac{1}{3}$ ب اس (٢) فبالساواة (اب + اس + ب س) X (اب + اس - ب س) ::
 (ب س + (اب - اس)) X (ب س - (اب - اس)) :: نج $\frac{1}{3}$ ب اس (٢)
 (نج $\frac{1}{3}$ ب اس) ولكن نسبة نظير جيب قوس الى جيب القوس كنسبة نصف
 القطر الى مماس ذلك القوس فاذا (اب + اس + ب س) X (اب +
 اس - ب س) : (ب س + (اب - اس)) X (ب س - (اب - اس)) ::
 ف : (م $\frac{1}{3}$ ب اس) و $\frac{2}{3}$ (اب + اس + ب س) X (اب + اس - ب س) ::
 (ب س + (اب - اس)) X (ب س - (اب - اس)) :: ف : م $\frac{1}{3}$ ب اس

سابقة ثانية

اذا فرض مقداران غير متساويين فنصف مجتمعهما مع نصف فضلتهما
 يعدل اكبرها ونصف مجتمعهما الا نصف فضلتهما يعدل اصغرهما

ليكن اب وب س مقدارين وليكن س ب د ي
 اب اكبرها . نصف اس في د واجعل اى يعدل ب س . فالامر واضح ان اس

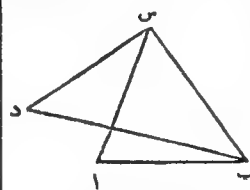
هو مجموع المقنارين وي ب فضلنها . ولكون ا س قد تنصّف في د ا د = د س
وا ي = ب س فاذا د ي = د ب ود ي ا و د ب نصف فضلة المقنارين . ولكن
ا ب = ب د و د ا اي نصف المجموع مع نصف الفضلة و ب س = نصف المجموع د س
الا نصف الفضلة ب د

فرع . اذا فرض مجموع مقنارين وفضلنها يمكن استعمال المقنارين لان نصف
المجموع مع نصف الفضلة هو الاكبر ونصف المجموع الا نصف الفضلة هو الاصغر
(انظر الجبر والمقابلة وجه ١٢٤ طبعة اولى و ١٤٦ طبعة ثانية)

القضية التاسعة . ن

اذا كانت نسبة اطول ضلعي مثلث الى اقصرها كنصف القطر الى
ماس زاوية ما تكون نسبة نصف القطر الى ماس فضلة تلك الزاوية
ونصف قائمة كماس نصف مجموع الزاويتين عند قاعدة المثلث الى
ماس نصف فضلنها

ليكن ا ب س مثلثا و ب س وس ا ضلعين من اضلاعه و ا ب قاعدته وليكن
ب س اطول من س ا . ارسم س د عمودا على
ب س وليعدل س ا . ارسم د ب . فالمثلث
ب س د قائم الزاوية ونسبة ب س : س د ::
ق : م س ب د (ق ا) فالزاوية س ب د
هي الزاوية التي تكون نسبة ماسها الى نصف



القطر كاضلع س د ا و س ا الى ب س او كنسبة اقصر الضلعين الى اطولها

ولكن ب س + س د : ب س - س د :: م : ق (س د ب + س ب د) :
م : ق (س د ب - س ب د) وايضا ب س + س ا : ب س - س ا :: م : ق
(س ا ب + س ب ا) : م : ق (س ا ب - س ب ا) فبالمساواة (لان س د = س ا)
م : ق (س د ب + س ب د) :: م : ق (س د ب - س ب د) :: م : ق (س ا ب + س ب ا) :
م : ق (س ا ب - س ب ا) ولكن الزاويتان س د ب + س ب د = ٩٠ فنسبة م : ق

(س د ب + س ب د) : م $\frac{1}{3}$ (س د ب - س ب د) : م $\frac{2}{3}$:

م (٤٥ - س ب د) (ق ٢ فرع ٢)

فنسبة $\frac{2}{3}$: م (٤٥ - س ب د) : م $\frac{1}{3}$ (س ا ب + س ب ا) : م $\frac{1}{3}$

(س ا ب - س ب ا) وقد تبرهن ان ب س : س ا : م $\frac{2}{3}$: م س ب د

فرع. اذا فرض ب س وس ا والزاوية عند س فلكي نجد الزاويتين عند ا

وب استعمل زاوية وسيهماي مثلا حتى تكون نسبة ب س : س ا : م $\frac{1}{3}$: ق : ماس ي

فتكون نسبة $\frac{2}{3}$: م (٤٥ - س ي) : م $\frac{1}{3}$ (ا + ب) : م $\frac{1}{3}$ (ا - ب) فنجد

اوب حسب السابقة الثانية

القسم الثاني

قواعد حل العمليات

قواعد قياس المثلثات مخوية في عملة واحدة وهي هذه . في مثلث بسيط ذي

سنة اشياء اي ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا مفروض منها ثلاثة اشياء واحد منها ضلع

مطلوب واحد من الثلاثة الآخر او كلها

العملة الاولى

في مثلث بسيط قائم الزاوية مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع

مطلوب الثلاثة الآخر

في مثلث قائم الزاوية اذا فرضت احدى الحادتين تعرف الاخرى لانها كال

الاولى وجيب احدى الحادتين هو نظير جيب الاخرى وقد جمعت قواعد الحل

حسب اختلاف الاشياء المفروضة في هذا الجدول . فالعمود الاول منه يدل على

المفروض والثاني على المطلوب والثالث على النسبة التي بها تحل العملة

المفروض	المطلوب	الحل
س ب وب	اس	١ $\frac{ق}{س} : \frac{ق}{ب} :: س : ب :: اس$
اي الوتر والزاوية	اب	٢ $\frac{ق}{س} : \frac{ق}{ب} :: نج : ب :: اب$
اس وس	ب س	٣ $\frac{ق}{س} : \frac{ق}{ب} :: نج : س :: اس$
اي ضلع واحد الحادتين	اب	٤ $\frac{ق}{س} : مم :: اس : اب$
س ب وب ا	س	٥ $\frac{ق}{س} : \frac{ق}{ب} :: س : ب :: ا$
اي الوتر وضلع	اس	٦ $\frac{ق}{س} : \frac{ق}{ب} :: نج : س :: اس$
اس واب	س	٧ $\frac{ق}{س} : مم :: اس : س$
اي الضلعان	س ب	٨ $\frac{ق}{س} : \frac{ق}{ب} :: اس : س :: ب$



تنبيهات . اذا فرض اس وس نجد الوتر ب س بواسطة القاطع ايضاً لان
 س : ا = س : ب :: $\frac{ق}{س} : \frac{ق}{ب} :: قاطع س : قاطع ب :: قاطع س : قاطع ب :: س : ب$
 واذا فرض ب س واب نجد اس كما في الجدول او بواسطة (ق ٤٧ ك ا) لان
 اس = ب س - ب ا واس = ب س - ب ا وايضاً حسب (ق ٥
 ك ا فرع) ب س - ب ا = (ب س + ب ا) x (ب س - ب ا) فاذا اس =
 ب س - ب ا = (ب س + ب ا) x (ب س - ب ا) وهذه الاخيرة اسهل اذا قصد حل
 العملية بالانساب

إذا فُرض $اس$ و $اب$ يوجد $ب$ من حسب (ق ٤٧ ك ١) لأن
 $ب$ من $= ب^2 = ا^2 + اس^2$ وإذا قُصد حل العملية بالانساب فالاسهل
 ان يُطلب أولاً $ماس$ من هكذا $اس : اب :: ق : م$ من ثم نجد $ب$ من
 $اس : ب :: ب : م$

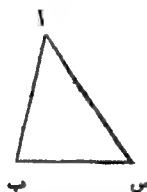
العملية الثانية

في مثلث حاد الزوايا مفروض ثلاثة اشياء واحد منها ضلع مطلوب
 الثلاثة الأخر

لهذه العملية اربع حالات

الحالة الاولى

مفروض زاويتان $ا$ و $ب$ والضلع $اب$. مطلوب الضلعان الآخران
 من $ا$ و $ب$ نستعلم من لانها متم $ا + ب$ ولنا (ق ٢) $ج$ من $ج : ا :: ب : اب$
 $ب$ من $ج : ب :: اب : اس$

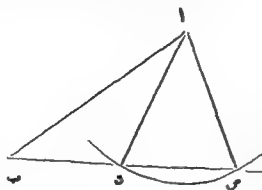


الحالة الثانية

مفروض الضلعان $اب$ و $اس$ والزاوية $ب$ التي تقابل احدهما . مطلوب $ا$ و $س$
 والضلع الآخر $ب$ من
 لكي نستعلم من لنا $اس : اب :: ج : ب$ و ايضا $ا = ١٨٠ - ب - س$
 ثم $ج : ب :: ج : ا$ و $اس : ب :: ب : س$ حسب الحالة الاولى

في هذه الحالة حيث يستعمل جيب $س$ فالجيب المذكور في المجلول قد يكون
 لحادة او لمنفرجة متم الحادة فتكون $س$ حادة او منفرجة لانه اذا كان $اس$ اقصر

من ا ب يوجد مثلثان لما الضلعان ا ب ا س والزواية عند ب متساوية ويكونان
غير متساويين لان الزاوية التي تقابل ا ب في الواحد هي متمم التي تقابلة في الاخر
كما ينفع من هذا الشكل



اجعل ا مركزاً و ا س نصف قطر
وارسم قوساً يقطع ب س في د وارسم ا د .
فالامر واضمح ان المثلثين ا ب س ا ب د
لما الزاوية عند ب والضلع ا ب مشتركان
بينها والضلعان ا س ا د متساويان

ولكن ب د لا يعدل ب س والزواية ب س ا لا تعدل ب د ا و ب د لا تعدل
ب ا س لان ا س ب ا د ب كل واحدة منها متمم الاخرى لان ا د س متساوي
السابقين و ا س د = ا د س وبالقاعدة المذكورة سابقاً توجد ا س ب ا و ا د ب

ومن هاتين توجد ب ا س و ب ا د لان ب ا س متمم ا ب س + ا س ب
(ق ٢٢ ك ١) فجميعها هو جيب ا ب س + ا س ب . ولكن ب ا د في فضلة ا س ب
و ا ب س لانها فضلة ا د س و ا ب س لان ا د س او ا س د = ا ب س + ب ا د
(ق ٢٢ ك ١) فلكي يستعمل ب س بعد استعمال س لنا ج س : ج د (س + ب) ::
ا ب : ب س وايضاً ج س : ج د (س - ب) :: ا ب : ب د

فاذا كان ا ب اطول من ا س تكون القضية ملتبسة والافقر ملتبسة

الحالة الثالثة

مفروض ضلعان ا ب و ا س والزواية بينهما المطلوب الاخران ب و س
والضلع الاخر ب س

اولاً ا ب + ا س : ا ب - ا س :: م ١ (س + ب) : م ٢ (س - ب)
وب = ١ (س + ب) + ١ (س - ب) : ١ (س + ب) - ١ (س - ب) :: م ١ (س + ب) : م ٢ (س - ب)
حسب السابقة الثانية

ولكي نجد ب س بعد استعمال ب لنا ج ب : ج ا :: ا س : ب س
و يستعمل ب س ايضاً بدون استعمال ب و س هكذا حسب (ق ٦) ب س =

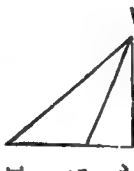
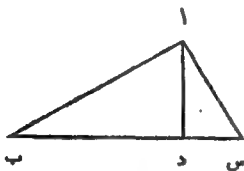
$$٦ \text{ ا ب } - ٢ \text{ نج ا ب } \times \text{ ا ب } \times \text{ ا س } + \text{ ا س }^٢$$

الحالة الرابعة

مفروض الاضلاع الثلاثة اب ب س اس مطلوب الزوايا الثلاث

حل أول

استعمل كمية ما ومهما ف حتى تكون نسبة ب س : ب ا + اس :: ب ا - اس :



ف فكون ف مجمع
فسي القاعدة ب د
د س او فضلها (ق ه)
فان كانت ف اكبر من
ب س فهي مجمع ب د

ود س وب س فضلها وان كانت ف اصغر من ب س فيكون ب س مجمع
القسمين وف فضلها وعلى كلتا الحالتين يُعلم مجمع ب د ود س فضلها فيعلم
ب د ود س (سابقة ثانية)

ثم (ق ا) س ا : س د :: ق ب : نجس وب ا : ب د :: ق ج : جب فتعلم
س وب ومنها نستعلم ا

حل ثان

ليكن د فضلة ا ب واس ثم (ق ٧ فرع ١) $اب \times اس =$
 $(ب س + د) \times (ب س - د) :: ق ج : ج ا$ ب اس

حل ثالث

ليكن ص مجمع الضلعين ب ا واس ثم (ق ٨ فرع ١) $اب \times اس =$
 $(ص + ب س) \times (ص - ب س) :: ق ج : نج$ ب اس

حل رابع

ليكن د وص كما تقدم ثم (ق ٨ فرع ٢) $(ص + ب س) \times (ص - ب س) =$
 $(ب س + د) \times (ب س - د) :: ق م : م ا$ ب اس

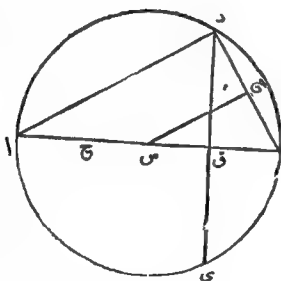


حاشية . من هذه الطرق الاربعة الاول اسهل للحفظ
والآخر اسرع للعمل والثاني اسهل من الثالث متى كانت
الزاوية المطلوبة اصغر من قائمة والآخر اسهل
ونظير الفائدة متى كانت الزاوية المطلوبة صغيرة جداً او
كبيرة جداً اي قريبة الى صفر او الى ٩٠ وذلك لقلة
الفرق بين جيب الاولى ونظير جيب الثانية

القسم الثالث

في اصطناع الجداول

في حل العمليات بواسطة القواعد السابقة لا بد من استعمال جداول مضمنة
المجيب والمماسات الخ لكل زاوية من ١ الى ٩٠ فيقتضي أولاً استعمال المجيب لدقيقة
واحدة اي لاصغر قوس في الجداول



١ ليكن ا د دائرة مركزها س
و د ب قوساً منها و د ب ي مضاعف
تلك القوس . فاذا رُسم الوتران د ي
د ب والعمودان عليهما من س اي س غ ب
س ق فقد تبين (ق لك امضافات)
ان س غ متناسب متوسط بين ربع
القطر ا ح و اق وس ق هو نظير جيب

القوس ب د وس غ نظير جيب نصف ب د فنظير جيب نصف قوس ما من
دائرة نصف قطرها واحد هو متناسب متوسط بين $\frac{1}{4}$ و $1 + \text{نجد ب د}$. فاذا فرض ا
= قوساً ما فنظير جيب $\frac{1}{4}$ هو متناسب متوسط بين $\frac{1}{4}$ و $1 + \text{نجد ا و (نجد } \frac{1}{4})^2 =$
 $\frac{1}{4} (1 + \text{نجد ا})$ ونجد $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (1 + \text{نجد ا})$

٢ الامر واضح ما تقدم اذا فرض نظير جيب قوس يمكن استعمال نظير
جيب نصف تلك القوس . لغرض القوس ب د = ٦٠ فالوتر ب د = $\frac{1}{4}$ فالعمود

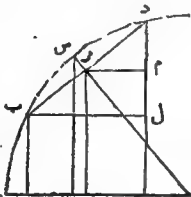
س ق = $\frac{1}{2}$ (ق ك ا مضافات) فلنا حسباً تقدم نجد $\frac{1}{2}$ ب د او نجد $20 =$
 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ وعلى هذا الاسلوب نجد $10 = \frac{1}{2} (1 + 1) = \frac{1}{2} (20)$
 ونجد $20.7 = \frac{1}{2} (1 + 1) = \frac{1}{2}$ الى آخره وعلى هذا الاسلوب نجد نظير
 جيب 20.2 و 20.1 و 20.0 حتى تنتصف القوس 12 مرة فيكون لنا جيب
 20.2 و 20.1 و 20.0 ومع نظير جيب قوس يستعمل الجيب لانه اذا طرح مربع نظير
 الجيب من مربع نصف القطر اى من واحد يبقى مربع الجيب وبالتحديد يعرف
 الجيب فيعرف جيب 20.2 و 20.1 و 20.0

٢ ثم ان نسبة جيوب الافواس الصغيرة جداً بعضها الى بعض في كسبة
 الافواس بعضها الى بعض تقريباً لانه كلما تعددت اضلاع شكل في دائرة قل الفرق
 بين الضلع والقوس التي تقابله ومتى كانت القوس صغيرة جداً يكون الفرق بينها
 وبين جيبها قليلاً جداً اى نسبة جيب قوس صغير جداً الى القوس نسبة متساوية اى
 نسبة قوس الى قوس كجيب الاول الى جيب الثاني . فمن جيب 20.2 و 20.1 و 20.0
 $20.0 = 1$ يستعمل جيب $1 = 0.0002908882$

٤ بعد استعمال جيب 1 يستعمل جيب 20.2 الخ بهذه النظرية

نظرية

ليكن اب اس ا د ثلاثة افواس وليكن ب س فضلة الاول والثاني وليعدل
 س د فضلة الثاني والثالث فنسبة نصف القطر الى
 نظير جيب الفضلة المشتركة ب س كجيب القوس
 اس الى نصف مجموع جيبى اب واد



ارسم س ي الى المركز . ليكن ب ف س غ
 د ح عموديات على اى فهي جيوب الافواس اب

اس ا د . ارسم ب د ولياتي س ي في ر . ارسم رك ي ح ك غ ف ا
 عموداً على اى وب ل ر م عمودين على د ح . فلكون القوس ب د قد تنصفت في
 س يكون س ي س عموداً على ب د وينصفه في ر وب ر جيب ب س اوس د وى ر
 نصف جيبه ولان ب د قد تنصف في ر ورم بولاي ب ل (ق ك ٦) فقد تنصف

ل د في م. ولكن ب ف = ح ل و ب ف + د ح = د ح + ح ل = ل د + ل ح =
 ل ح + م + ل ح = م ح او ل ك راي رك = $\frac{1}{2}$ (ب ف + ح د). ولكون
 الخلائط س غ ي رك ي متساوي الزوايا تكون نسبة س ي : ر ي :: س غ : ر ك
 وقد تبين ان ي ر = نج ب س و رك = $\frac{1}{2}$ (ب ف + د ح) فنسبة $\frac{1}{2}$:
 نج ب س :: ج ا س : $\frac{1}{2}$ (ج ا ب + ج ا د)

فرع اذا وقعت النقطة ب على النقطة ا لنا $\frac{1}{2}$ نج ب س :: ج ا
 ب س : $\frac{1}{2}$ ج ب د اي نسبة نصف النظر الى نظير جيب قوس كسبة جيب القوس
 الى نصف جيب مضاعف القوس فاذا فرضت قوس = ا لنا $\frac{1}{2}$ ج ا = ج ا ×
 نج ا او جيب ١٢ = ج ا × نج ا وج ا = ج ا × نج ا فن جيب ا
 ونظير جيبها يوجد جيب ا

ثم $\frac{1}{2}$: نج ا :: ج ا : $\frac{1}{2}$ (ج ا + ج ا) او ج ا + ج ا = ج ا = نج ا
 ا + ج ا و طرح ج ا من الجانين نصير ج ا = ج ا × ج ا - ج ا
 ومكلا ج ا = ج ا × ج ا - ج ا
 ج ا = ج ا × ج ا - ج ا
 ج ا = ج ا × ج ا - ج ا
 ج ا = ج ا × ج ا - ج ا
 ومكلا لاستعلام جيوب الافواس التي فضلها اكثر من ا. ليكن ا + ب + ا
 ج ا ثلاثة افواس فضلها اكثر من ا فحسب النظرية السابقة $\frac{1}{2}$: نج ب ::
 ج ا + ا : ب : $\frac{1}{2}$ (ج ا + ج ا + ا) فاذا كان نصف القطر واحدا لنا ج ا +
 ج ا + ا = ب = ج ا × ج ا + ا (ج ا + ا) او ج ا + ا = ب = ج ا ×
 ج ا + ا - ج ا

وعلى هذا الاسلوب يصطنع جدول جيوب ونظير جيوب لاي قوس فرضت من صفر
 الى ٩٠. و جدول المماسات يصطنع بانقسام جيب قوس على نظير جيبها لان م ا =
 $\frac{1}{2}$. وبعد استعمال المماسات الى حد ٤٥ نستعلم البقية الى حد ٩٠.
 بناعدة اخرى اسهل. لان مماس قوس اكبر من ٤٥ يعدل نظير المماس لقوس
 تحت ٤٥ بمثل ما كان الاول فوق ٤٥ اي مماس ٥٠ = نظير مماس ٤٠ ونصف

النظر متناسب متوسط بين الماس ونظير الماس . فاذا فُرِضَتْ فُضْلَةُ قُوسٍ مَا
 $٥٠^\circ = د$ لنا م $(٥٠^\circ - د) : ١ : ١ : ١ : م$ $(٥٠^\circ + د)$ وم $(٥٠^\circ + د) =$

$$\frac{١}{م (٥٠^\circ - د)}$$

الْقَطَاعُ نَسْتَعْلَمُ حَسَبَ (حد ٩ فرع ٢) حيث يبرهن ان نصف النظر متناسب

$$\text{متوسط بين نظير جيب قوس وقاطعو اي قاطع} = \frac{١}{١}$$

سهم الجيب يوجد بطرح نظير الجيب من نصف النظر

هـ يستتبع من النظرية السابقة بعض العبارات السهلة الاستعمال في حل
 العمليات

اولاً . اذا فُرِضَتْ التَّوَسُّ اس = ا وب س = ب ونصف النظرى س = ر

فحينئذ ا د = ا + ب و ا ب = ا - ب ولنا ما تقدم برهانه

$$١ : نجوب :: ج ا : \frac{١}{ف} :: ج (ا + ب) + \frac{١}{ف} ج (ا - ب) اي$$

$$ج ا \times نجوب = \frac{١}{ف} ج (ا + ب) + \frac{١}{ف} ج (ا - ب)$$

ثانياً . لان ب ف رك د ح متوازية والخطا ب د س ح قُطْعَا متناسبا

فالخط ف ح الذي هو فُضْلَةُ ف ي ح قد تنصف في ك وكا يبرهن في النظرية

ك ي هو نصف مجموع س ي وح ي اي نظير الجيبين للتوسين ا ب و ا د وبشابهة

المثلثين ي غ س ي ك ر نسبة ي س : ي ر :: غ ي : س ك . وغ ي هو نظير جيب

$$اس فاذا \frac{١}{ف} : نجوب س :: نجوب اس : \frac{١}{ف} نجوب ا د + \frac{١}{ف} نجوب ا ب او$$

$$١ : نجوب :: نجوب ا : \frac{١}{ف} نجوب (ا + ب) + \frac{١}{ف} نجوب (ا - ب) فاذا$$

$$نجا \times نجوب = \frac{١}{ف} نجوب (ا + ب) + \frac{١}{ف} نجوب (ا - ب)$$

ثالثاً . المثلثان ر د م س د غ متشابهان . لان ك ر م قائمة وى ر د قائمة فاذا

طُرِحَت الزاوية ي ر م فالزاوية د ر م = ي ر ك او ي س غ والزاويتان د م ر

س غ ي متساويتان لانهما قائمتان ففي المثلثين ر د م س غ ي الاضلاع التي تلي

الزوايا المتساوية هي متناسبة وى س : س غ :: د ر : ر م و ر م هو نصف فُضْلَةُ

نظير الجيبين ف ي ح فلنا

$$\frac{١}{ف} ج ا س :: ج ب س : \frac{١}{ف} نجوب ا ب - \frac{١}{ف} نجوب ا د او$$

١: ج ا = ج ب : $\frac{1}{r}$ نج (ا - ب) - $\frac{1}{r}$ نج (ا + ب) وايضاً

ج ا X ج ب = $\frac{1}{r}$ نج (ا - ب) - $\frac{1}{r}$ نج (ا + ب)

رابعاً . في المثلثين ي س غ درم نسبة ي س : ي غ :: رد : دم ودم هن
نصف فضلة المجهين د ح وب ي فاذا

ق : $\frac{1}{r}$ نج ا س = ج ب : س : $\frac{1}{r}$ ج ا د - $\frac{1}{r}$ ج ا ب او

١ : نج ا = ج ب : $\frac{1}{r}$ ج (ا + ب) - $\frac{1}{r}$ ج (ا - ب) فاذا

نج ا X ج ب = $\frac{1}{r}$ ج (ا + ب) - $\frac{1}{r}$ ج (ا - ب)

خامساً . اذا كان اوب قوسين وكان نصف النظر واحداً فلنا

(١) ج ا X نج ب = $\frac{1}{r}$ ج (ا + ب) + $\frac{1}{r}$ ج (ا - ب)

(٢) نج ا X نج ب = $\frac{1}{r}$ نج (ا - ب) + $\frac{1}{r}$ نج (ا + ب)

(٣) ج ا X ج ب = $\frac{1}{r}$ نج (ا - ب) - $\frac{1}{r}$ نج (ا + ب)

(٤) نج ا X ج ب = $\frac{1}{r}$ ج (ا + ب) - $\frac{1}{r}$ ج (ا - ب)

ومن هذه الاربع يُستخرج اربع آخر

جميع الاولى والرابعة ج ا X نج ب + نج ا X ج ب = ج (ا + ب)

بطرح الرابعة من الاولى ج ا X نج ب - نج ا X ج ب = ج (ا - ب)

جميع الثانية والثالثة نج ا X نج ب + ج ا X ج ب = نج (ا - ب)

بطرح الثالثة من الثانية نج ا X نج ب - ج ا X ج ب = نج (ا + ب)

سادساً . اذا فرض ا + ب = ص و ا - ب = د فحسب الاولى من العبارات

السابقة وحسب السابقة الثانية $\frac{ص + د}{r} = 1$ وب $\frac{ص - د}{r}$

فجيب $\frac{ص + د}{r} \times \frac{ص - د}{r} = \frac{1}{r} ج ص + \frac{1}{r} ج د$. ولكن ص ود

دالآن على اي قوسين كانا فيمكن ان يسميا اوب كما في العبارات السابقة . فلنا

ج $\frac{ا + ب}{r} \times \frac{ا - ب}{r} = \frac{1}{r} ج ا + \frac{1}{r} ج ب$

او $٢ ج \frac{ا + ب}{r} \times \frac{ا - ب}{r} = ج ا + ج ب$. ومن العبارة الثانية

السابقة لنا $٢ نج \frac{ا + ب}{r} \times \frac{ا - ب}{r} = نج ا + نج ب$ ومن الثالثة لنا

$$٢ \text{ ج } \frac{ب+١}{٢} \times \text{ج } \frac{ب-١}{٢} = \text{نجب} - \text{نجا ومن الرابعة لنا}$$

$$٢ \text{ نج } \frac{ب+١}{٢} \times \text{ج } \frac{ب-١}{٢} = \text{جا} - \text{جب}$$

وفي هذه العبارات حسب القوس ب اقصر من القوس ا
سابقاً. وعلى هذا الاسلوب نستخرج عبارات دالة على ماسات اقواس لأن ماس
قوس يعدل الجيب منسوماً على نظير الجيب

$$\text{م (ا+ب)} = \frac{\text{ج (ب+١)}}{\text{نج (ب+١)}} \text{ وقد تبرهن ان}$$

$$\text{ج (ا+ب)} = \text{جا} \times \text{نجب} + \text{نجا} \times \text{جب} \text{ وايضاً ان}$$

$$\text{نج (ا+ب)} = \text{نجا} \times \text{نجب} - \text{جا} \times \text{جب} \text{ فاذا}$$

$$\text{م (ا+ب)} = \frac{\text{جا} \times \text{نجب} + \text{نجا} \times \text{جب}}{\text{نجا} \times \text{نجب} - \text{جا} \times \text{جب}} \text{ ثم بقسمة الصورة}$$

والمخرج على نجا \times نجب لنا

$$\text{م (ا+ب)} = \frac{ب^٢ + ١٢ - ب^٢ - ١٢}{ب^٢ \times ١٢ + ١ - ب^٢ \times ١٢}$$

$$\text{وهكذا (م ا-ب)} = \frac{ب^٢ \times ١٢}{ب^٢ \times ١٢ + ١}$$

ثامناً اذا تحولت الثالثة من العبارات السابقة (٦) على هذا المتوال فلنا

$$\frac{\text{جا+جب}}{\text{جا-جب}} = \frac{\frac{١}{٢} \frac{ب+١}{ب}}{\frac{١}{٢} \frac{ب-١}{ب}} \text{ وحسب (ق ٢ فرع ا)}$$

$$\frac{\text{نجا+نجب}}{\text{نجا-نجب}} = \frac{\frac{١}{٢} \frac{ب+١}{ب}}{\frac{١}{٢} \frac{ب-١}{ب}} \text{ وبالفرع الثاني}$$

$$\frac{\text{جا+نجب}}{\text{نجا-نجب}} = \frac{\frac{١}{٢} \frac{ب+١}{ب}}{\frac{١}{٢} \frac{ب-١}{ب}} \text{ اولاً } \frac{ق}{٢} = ١$$

$$\frac{\text{جا+جب}}{\text{نجا+نجب}} = \frac{١}{٢} \frac{ب+١}{ب} \text{ م (ا+ب)}$$

تنبيه. اذا تحولت هذه المعادلات الى نسب فلا بد من اعادة
الواحد اي $\frac{ق}{٢}$ الذي قد ترك للاختصار لكونه واحداً فلا يعتد به عند
الضرب ولكن يعتبر في النسب

اصول قياس المثلثات الكروية

القضية الاولى

اذا قُطِعَت كُرَةٌ بِسَطْحٍ مَارٍّ بِمَرْكُزِهَا فَالْقَطْعُ دَائِرَةٌ مَرْكُزُهَا مَرْكُزُ الْكُرَةِ
وَهِيَ تَعْدِلُ الدَّائِرَةَ الَّتِي بِدَوْرَانِهَا رُسِمَتِ الْكُرَةُ
لأن كل المخطوط المستقيمة المرسومة من مركز الكرة الى سطحها تعدل نصف
قطر نصف الدائرة المحيطة بالكرة (حد ٧ ك ٢ مضافات) فموضع تقاطع سطح بسيط
وسطح الكرة خط في سطح واحد وكل نقطة منه على بعد واحد من مركز الكرة فهو
محيط دائرة (حد ١١ ك ١) مركزها مركز الكرة ونصف قطرها نصف قطر الكرة او
نصف قطر نصف الدائرة التي بدورانها اُحدثت الكرة فتعدل الدائرة التي كان
نصف الدائرة المحدث نصفها

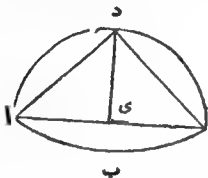
حدود

- ١ كل دائرة حادثة من قطع كرة بسيط مَارٍّ بِمَرْكُزِهَا تَسَمَّى دَائِرَةً عَظِيمَةً
فرع. كل الدوائر العظيمة لكرة واحدة متساوية وتنصف بعضها بعضاً لأن
انصاف اقطارها متساوية كما تقدم برهانه وخط تقاطعها قطر لكل واحدة منها
- ٢ قطب دائرة عظيمة هو نقطة في سطح الكرة وجميع المخطوط المستقيمة المرسومة
منها الى محيط الدائرة متساوية
- ٣ الزاوية الكروية هي زاوية على سطح كرة واقعة بين قوسين من دائرتين
عظمتين تقاطعان وهي تعدل ميل سطحين مانئين الدائرتين احدهما على الاخر
- ٤ المثلث الكروي هو شكل على سطح كرة واقع بين ثلاثة اقواس من ثلاث
دوائر عظيمة كل واحد منها اقل من نصف دائرة

القضية الثانية

قوس دائرة عظيمة واقع بين قطب دائرة اخرى عظيمة ومحيطها هو رُبع دائرة

لنكن $اب س$ دائرة عظيمة ود قطبها فاذا مرَّ $س د$ قوس دائرة عظيمة في $د$ ولاقي $اب س$ في $س$ فالقوس $د س$ ربع دائرة الدائرة التي $س د$ قوس منها لتلاقي $اب س$ ايضاً في $ا$ وليكن $اس$ موضع تقاطع هاتين الدائرتين العظيمتين فهو يمرُّ في $ي$ مركز الكرة $اس$ ارم $دا د س$. الخط $اد = د س$ (حد ٢)



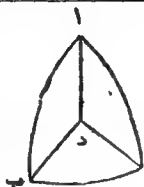
فالقوس $اد =$ القوس $د س$ (ق ٢٨ ك ٢) و $اد س$ نصف دائرة فكل واحدة من القوسين $اد$ و $د س$ ربع دائرة

فرع اول . اذا رُسم $د ي$ فالزاوية $د ي ا$ قائمة و $د ي$ عمودي على كل خطٍ يلاقى في سطح الدائرة $اب س$ فهو عمود على ذلك السطح (ق ٤ ك ٢ مضافات) فالخط المستقيم المرسوم من قطب دائرة عظيمة الى مركز الكرة هو عمود على سطح تلك الدائرة . وبالفعل كل خط من مركز كرة عموداً على سطح دائرة عظيمة يلاقى سطح الكرة في قطب تلك الدائرة

فرع ثانٍ . الدائرة $اب س$ لما قطبان واحد على الجانب الواحد والاخر على الجانب الاخر من سطحها وما نهايتا قطر الكرة العمودي على سطح $اب س$. ولا يمكن ان تكون نقطتان اخريان قطبي الدائرة $اب س$

القضية الثالثة

اذا كان قطب دائرة عظيمة في نقطة تقاطع دائرتين اخريين عظيمتين فالقوس من الدائرة الاولى الواقعة بين الاخرين هي قياس الزاوية الكروية المحاذية بينها راسها عند القطب الذي هو نقطة التقاطع لكن $د$ مركز كرة و $ب ا س$ دائرتين عظيمتين تقاطعان في $ا$ وليكن $ب س$



قوس دائرة اخرى عظيمة قطبا ا . فالتوس ب س هو
قياس الزاوية الكروية ب ا س

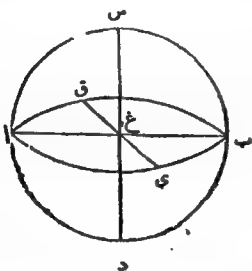
ارسم ا د ب د س . لان اقطب ب س فالتوس
ا ب ربع دائرة واس كذلك (ق ٢) و ا د ب ا د س
فائتمان . فالزاوية س د ب هي ميل سطح دائرة القوس

ا ب على دائرة القوس ا س (حد ٣) و (حد ٤ ك م) وتعديل الزاوية الكروية ب ا س
والتوس ب س قياس الزاوية ب د س فهو يقيس الزاوية الكروية ب ا س ايضا
فرع . اذا كان كل واحد من القوسين ا ب ا س المقاطعتين في اربع دائرة
تكون اقطب الدائرة العظيمة المارة في ب وس نهايتي القوسين . لان ا ب واس
ربعا دائرة فالزاويتان ا د ب ا د س فائتمان فالخط ا د عمود على السطح ب د س
اي على سطح الدائرة العظيمة المارة في ب وس فالنقطة ا في قطب الدائرة العظيمة
المارة في ب وس (ق ا فرع ٢)

القضية الرابعة

اذا كان سطح دائرة عظيمة عموديا على سطح دائرة اخرى عظيمة فمحيط
كل واحدة منها يمر بقطبي الاخرى . وبالقلب اذا مر محيط دائرة
عظيمة في قطبي دائرة اخرى عظيمة فسطح الواحدة عمودي على سطح
الاخرى

لكن اس ب د اى ب ق دائرتين عظيمتين سطح الواحدة عمودي على سطح
الاخرى فقطبا اس ب د هما في محيط
اى ب ق وقطبا اى ب ق في محيط
اس ب د



من غ مركز الكرة ارسم الخط غ س في
سطح اس ب د عمودا على ا ب . فلان غ س
في سطح اس ب د العمودي على اى ب ق
ولانه عمود على موضع تقاطع السطحين فهو عمود

على سطح اى ب ق (حد ٢ ك ٢م) فالنقطة س في قطب الدائرة اى ب ق (ق ٢)
 فرع اول (واذا اخرج س غ الى د تكون د قطب اى ب ق الآخر
 وهكذا اذا رُسم غى في سطح اى ب ق عموداً على اب واخرج الى ق يبرهن
 ان اى وق قطبا للدائرة اس ب د وبالقلب اذا كانت س قطباً للدائرة اى ب ق
 فالدائرة العظيمة المارة ب س في عمودية على اى ب ق . لانه اذا رُسم س غ من
 القطب الى مركز الدائرة اى ب ق يكون عموداً على سطحها (ق ٢ فرع اول) فكل
 سطح مار في س غ (ق ١٧ ك ٢م) هو عمودي على سطح اى ب ق و سطح اس ب د
 هو مار في س غ فهو عمود على اى ب ق

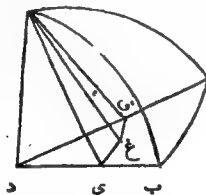
فرع اول . في دائرتين عظيمتين اذا مرّت اولاهما في قطبي الثانية فالثانية تمر
 بقطبي الاولى

فرع ثان . كل الدوائر العظيمة التي لما قطرها مشترك تكون اقطابها في دائرة
 عظيمة سطحها عمودي على ذلك القطر

الفضية الخامسة

في مثلث كروي متساوي الساقين تكون الزاويتان عند القاعدة
 متساويتين

ليكن اب س مثلثاً كروياً . والضلعا ب منه فليعدل الضلع اس منه فالزاوية
 الكروية اب س تعدل الكروية اس ب



ليكن د مركز الكرة . ارم دب دس دا .

ومن ارم اى عموداً على دس واى عموداً على س

د ب وفي السطح دب س ارم ق غ عموداً على

دس وى غ عموداً على دب وليتقيا في غ . ارم اغ

لان دى عمود على اى وى غ فهو عمود

على السطح المار بها (ق ٤ ك ٢م) فكل سطح مار في دى هو عمودي على سطح اى غ

(ق ١٧ ك ٢م) فالسطح دب س عمودي على سطح اى غ . ولهذا السبب هو عمودي

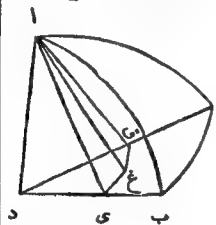
على سطح اى غ ايضا فالخط اغ الذي هو موضع تقاطع السطحين اى غ اى غ هو

عموداً على سطح د ب س (ق ١٨ ك ٢ م) والزوايتان ا غ ي ا غ ق قائمتان
ولكن القوس ا ب تعدل القوس ا س فالزاوية ا د ب = ا د س . فالمثلثان
ا د ي ا د ق لهما الزوايتان ا د ق ا د ي متساويتان وايضاً ا ي د ا ق د لانها
قائمتان والضلع ا د مشترك بينهما فالضلع ا ي يعدل الضلع ا ق (ق ٢٦ ك ١)
و د ي = د ق ولان ا غ ي ا غ ق قائمتان فالمرعيان على ا غ و غ ي يعدلان المربع
على ا ي وكذلك ا غ + غ ق = ا ق واي = ا ق فاذا ا غ + غ ي = ا غ + غ ق
و غ ي = غ ق و غ ي = غ ق فالزاوية ا ق غ = ا ي غ (ق ٨ ك ١) وا ق غ هي
المحاذية بين سطح ا د س و سطح د ب س (حد ٤ ك ٢ م) لان ا ق و ق غ عمودان
على د س موضع تقاطع السطحين فالزاوية ا ق غ = الزاوية الكروية ا س ب (حد ٢)
ولهذا السبب ايضاً ا ي غ = الزاوية الكروية ا ب س واي غ = ا ق غ فاذا ا ا ب س
= ا س ب

القضية السادسة

في مثلث كروي اذا كانت الزوايتان عند القاعدة متساويتين فالمثلث
متساوي الساقين

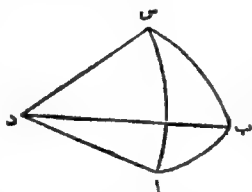
يبرهن كما في القضية السابقة ان ا غ ق ا غ ي قائمتان وان ا ق غ ا ي غ
تعدلان المحاذيتين بين السطحين د ا س د ا ب
والسطح د ب س وان ا ق غ = ا ي غ وان
ا ق = ا ي ثم د ق + ق ا = د ا و د ي + ي ا = ا س
د ا و ا ق = ا ي فاذا د ق = د ي و د ق =
د ي فالزاوية د ا ق = د ا ي فالقوس ا ب =
القوس ا س



القضية السابعة

كل ضلعين من مثلث كروي هما معاً اطول من ضلعه الثالث

ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً فكل ضلعين منه $اب$ و $ب س$ هما معاً أطول من الضلع الثالث $ا س$



ليكن $د$ مركز الكرة . ارم $د س$ د ب
 ١. فالزاوية المجسمة عند $د$ يحيط بها الثلاث
 زوايا البسيطة $ا د ب$ $ا د س$ $ب د س$ وكل
 اثنتين منها معاً $ا د ب$ $ب د س$ أكبر من
 الثالثة $ا د س$ (ق ٢٠ ك ٢م) فكل اثنتين

من الاقواس $ا ب$ $ا س$ $ب س$ التي تقيس هذه الزوايا هما معاً أطول من الثالث

الفضية الثامنة

اضلاع مثلث كروي الثلاثة هي معاً أقل من محيط دائرة عظيمة

في رسم الفضية السابقة ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً فاضلاعه الثلاثة $ا ب$ $ا س$ $ب س$ هي معاً أقل من محيط دائرة عظيمة

ليكن $د$ مركز الكرة فالزوايا البسيطة التي تحيط بالزاوية المجسمة عند $د$ هي معاً أقل من اربع زوايا قائمة (ق ٢١ ك ٢م) فالاقواس التي تقيسها هي معاً أقل من اربعة ارباع دائرة او أقل من محيط الدائرة التي مركزها $د$ ونصف قطرها $ا د$

الفضية التاسعة

في مثلث كروي الزاوية الكبرى تقابل الضلع الأطول وبالعكس

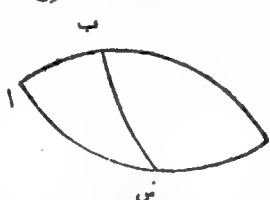


ليكن $اب س$ مثلثاً كروياً فالزاوية الكبرى
 ١ تقابل الضلع الأطول $ب س$. اجل الزاوية
 $ب ا د$ تعدل الزاوية عند $ب$ فالضلع $ب د = ا د$
 (ق ٦) و $ا د + د س = ب س$ ولكن $ا د + د س < ب س$
 (ق ٧) فإذا $ا ب س < ا س$

وب $ب س$ يقيس الزاوية عند $ا$. ولما قلب هذه الفضية فقد سبق برهانه في (ق ١٩ ك ١)

القضية العاشرة

إذا كان مجموع ضلعي مثلث كروي أكثر من نصف دائرة تكون كل واحدة من الزاويتين الداخليتين عند القاعدة أكبر من الخارجة المقابلة عند القاعدة. وإذا عدل مجموعها نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين تعدل الخارجة. وإذا كان مجموعها أقل من نصف دائرة فكل واحدة من الداخليتين اصغر من الخارجة. وإيضاً مجموع الداخليتين عند القاعدة أكبر من قائمتين أو يعدل قائمتين أو اصغر من قائمتين حسبما كان مجموع الضلعي أكثر من نصف دائرة أو يعدله أو اصغر منه. ليكن AB مثلثاً كروياً ضلعا AB و BC وقاعدته AC . اخرج احد



الضلعين AB والقاعدة AC حتى يلتقا أيضاً في D . فالقوس AB نصف دائرة والزاوية الكروية عند A تعدل الزاوية عند D لأن كل واحدة منها هي ميل الدائرة AB على الدائرة AC D

(١) إذا كان $AB + BC =$ نصف دائرة أو ادخمت $BC = AB$ د والزاوية عند D (ق ٥) أو عند $A = BC$ د أي الداخلة عند القاعدة تعدل الخارجة المقابلة

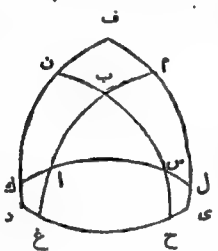
(٢) إذا كان $AB + BC$ أكبر من نصف دائرة أو من AB د فخطبت BC أكبر من BC د والزاوية عند D أو أكبر من BC د (ق ٩)

(٣) وهكذا إذا كان $AB + BC$ أقل من نصف دائرة أو من AB د تكون D أو اصغر من BC د. ثم BC د BC د BC د قائمتين. فإذا كانت أكبر من BC د يكون $A + BC$ أكبر من قائمتين. وإذا كان $A = BC$ د يكون $A + BC =$ قائمتين وإذا كان A اصغر من BC د يكون $A + BC$ أقل من قائمتين

النضية المحادية عشرة

اذا جعلت زوايا مثلث كروي اقطاب ثلاث دوائر عظيمة فهذه
الدوائر الثلاث بتقاطعاتها تُحدث مثلثًا يسمى مَمَّ الاول . واضلاع
احدهما ممات للاقواس التي تقيس زوايا الآخر

ليكن ا ب س مثلثًا كرويًا وليكن اوب وس اقطابًا للدوائر العظام ف ي
ي د د ف التي تقاطع في ف وي ود . فاضلاع
المثلث ف ي د هي ممات لاقبسة الزوايا اوب
وس اي ف ي مم ب ا س و د ي مم ا ب س
ود ف مم ا س ب . وايضًا ا س مم الزاوية
د ف ي و ا ب مم الزاوية ف ي د و ب س مم
الزاوية ي د ف . اخرج ب س الى ن و ج و ا ب
الى م و غ واس الى ك ول



لأن اقطب ف ي والدائرة ا س تمر في ا فالدائرة ف ي تمر بقطب ا س
(ق ٤ فرع ١) ولأن س قطب ف د فالدائرة ف د تمر بقطب ا س فقطب ا س
هو ف عند تقاطع القوسين ي ف د ف . وهكذا يبرهن ان د قطب ب س وي
قطب ا ب

ولان ف قطب ا ل وي قطب ا م فالقوس ف ل ربع دائرة وي م كذلك
(ق ٢) وف ل م ي معًا او ف ي م ل معًا يعدلان نصف دائرة وم ل قياس
ب ا س (ق ٣) فأذا ف ي مم قياس ب ا س وهكذا في البقية
ولأن س ن ربع دائرة وب ح ربع دائرة فالقوسان س ب ب ح معًا او ن ح
ب س معًا يعدلان نصف دائرة ون ح قياس ف د ي فقياس ف د ي مم ب س
وهكذا في البقية

القضية الثانية عشرة

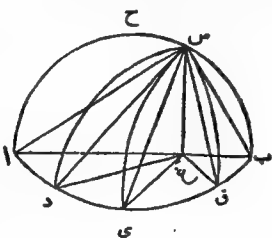
الزوايا الثلاث من مثلث كروي هي معاً أكبر من قائمتين وأصغر من ست زوايا قائمة

في رسم القضية السابقة اقيسة الزوايا الثلاث ا ب س في المثلث ا ب س مع اضلاع المثلث المتممة د ي ف تعدل ثلاثة انصاف دائرة (ق ١١) ولكن اضلاع ف د ي الثلاثة معاً اقل من نصف دائرة (ق ٨) فاقيسة اوب وس أكبر من نصف دائرة فالزوايا الثلاث اوب وس أكبر من قائمتين ولأن الزوايا الداخلة من كل مثلث مع الخارجة تعدل ست زوايا قائمة فالداخلة وحدها اقل من ست زوايا قائمة

القضية الثالثة عشرة

إذا رسمت اقواس دوائر عظيمة على محيط دائرة عظيمة من نقطة في محيط الكرة ليست هي قطب تلك الدائرة فاطول هذه الاقواس هو المار بقطب تلك الدائرة ومنته هو الاقصر ومن البقية فالاقرب الى الاطول اطول من الابد من

ليكن ا د ب محيط دائرة عظيمة قطبها ح ولكن س نقطة اخرى ومن س لرسم اقواس على ا د ب فالاطول هو س ح المار بالقطب والاقصر هو س ب من س ح ومن البقية فالاقرب الى س ح ا اي س د هو اطول من س ي الابد منه. من س ا رسم س غ عموداً على ا ب فهو عمود على سطح ا د ب. ا ر س غ د غ ي غ ي س ا س د س ي س ق س ب لان ا ب قطر الدائرة ا د ب وغ نقطة



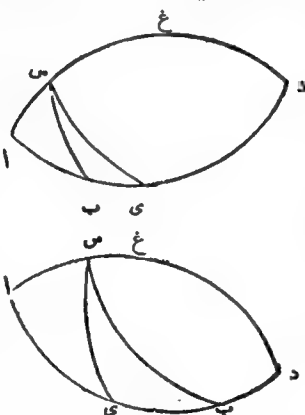
فيه غير المركز فالقسم اغ الذي فيه المركز هو اطول المخطوط (ق ٧ ك ٢) التي
تُرسم من غ الى المحيط وب اقصرها وب د الاقرب الى اغ اطول من غ ي الذي
هو ابعد. ولكن المثلثان س غ ا س غ د لما قائمة عند غ واس = اغ + غ س
ود س = د غ + غ س ولكن اغ + غ س < د غ + غ س لان اغ < د غ
فاذا اس < د س واس < د س. ويكون الوتر اس اطول من الوتر
د س فالقوس اس اطول من القوس د س. وهكذا في البنية

الفضية الرابعة عشر

في مثلث كروي قائم الزاوية الضلعان المحيطان بالقائمة والزاويتان
المقابلتان لهما من جنس واحد. اي اذا كان الضلع اكبر من ربع دائرة
تكون الزاوية المقابلة اكبر من قائمة واذا كان اقل من ربع تكون

الزاوية المقابلة اصغر من قائمة

ليكن اب س مثلثا كرويا له قائمة عند ا فالضلع اب جنمة كجس الزاوية
المقابلة اس ب



اخرج القوسين حتى تلتقيا ايضا
في د ونصف ا د في ي. فيكون اس د
نصف دائرة واب د نصف دائرة
واي قوس ٩٠. وقد فرضت س اب
قائمة فسطح الدائرة اب د عمودي على
سطح الدائرة اس د فقطب اس د انما
هو في اب د (ق ٤ فرع اول) وهو
في ي. ليكن ي س قوس دائرة عظيمة
مارة في ي وس

فلكون ي قطب الدائرة اس د يكون ي س ربع دائرة (ق ٢) وسطح ي س
عمودي على سطح الدائرة اس د (ق ٤) فالزاوية الكروية اس ي قائمة فاذا كان

اب اقصر من اى تكون اس ب اصغر من قائمة وإذا كان اب اطول من اى
تكون اس ب اكبر من اس ي واكبر من قائمة وهكذا يبرهن قلب هذه القضية

القضية الخامسة عشرة

في مثلث كروي ذي قائمة اذا كان الضلعان المحيطان بالقائمة من
جنس واحد يكون الوتر اقل من ربع دائرة وإذا كانا مختلفي الجنس
يكون الوتر أكثر من ربع دائرة

في رسم القضية السابقة نصف ا د في غ فيكون غ قوس ٩٠ وغ قطب
اب د

(١) ليكن اب اس اقل من ٩٠. فليكون س نقطة في سطح الكرة غير قطب
اب د تكون القوس س غ د المارة بالقطب غ اطول من س ي وس ي اطول من
س ب (ق ١٢) وس ي ربع دائرة فيكون س ب اقل من ربع دائرة. وهكذا
يبرهن في المثلث س د ب ذي القائمة عند د الذي ضلعا س د و د ب اكبر من
ربع دائرة فالوتر س ب اقل من ربع دائرة

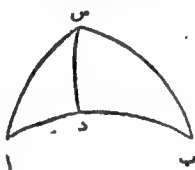
(٢) ليكن اس اقل من ٩٠ واب أكثر من ٩٠. فلان س ب واقع بين
س غ د وس ي فهو اطول من س ي (ق ١٢) اي اطول من ربع دائرة
فرع أول. وبالقلب في مثلث كروي قائم الزاوية اذا كان الوتر أكثر من
ربع دائرة يكون الضلعان مختلفي الجنس والآفن جنس واحد
فرع ثان. في مثلث كروي قائم الزاوية الزاويتان الاخرتان من جنس
الضلعين المتباينين لما فاذا كان الوتر اكبر من نصف دائرة فالزاويتان الاخرتان
مختلفتا الجنس والآفن جنس واحد

فرع ثالث. الضلعان من جنس الزاويتين المتباينتين فاذا كانت زاوية والضلع
الذي يليها من جنس واحد فالوتر اقل من نصف دائرة وبالقلب

القضية السادسة عشرة

في مثلث كروي اذا رُسم عمود على القاعدة من الزاوية المقابلة ووقع العمود داخل المثلث فالزاويتان عند القاعدة من جنس واحد واذا وقع خارج المثلث فهما مختلفتا الجنس

ليكن ا ب س مثلثاً كروياً ولترسم القوس س د من س عموداً على القاعدة ا ب
(١) لينع س د داخل المثلث . فالزاويتان ا د س ب د س قائمتان فالزاويتان عند ا و ب هما من جنس س د (ق ١٤)



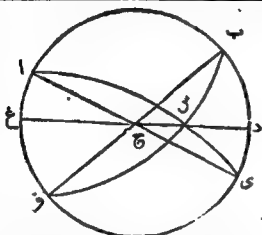
(٢) لينع س د خارج المثلث فالزاوية عند ب هي من جنس س د (ق ١٤) وس ا د من جنس س د فالزاويتان ب و س ا د من جنس واحد وب و س ا ب مختلفتا الجنس فرعاً. اذا كان ا و ب من جنس واحد يقع العمود داخل المثلث والا فخارجه



القضية السابعة عشرة

اذا رُسم عمود على قاعدة مثلث كروي من الزاوية المقابلة ووقع داخل المثلث او كان اقرب الاثنين الواقعين خارجه فاصغر قسي القاعدة يلي اقصر ضلعي المثلث اذا كان مجموع الضلعين اقل من نصف دائرة ويلي اطول الضلعين اذا كان مجموعها اكثر من نصف دائرة

ليكن ا ب ي ف دائرة عظيمة من كره وج قطبها و غ ح د دائرة مارة في ح



وعودية على ا ب ي ف . ولتكن ي وب
نقطتين في الدائرة ا ب ي ف على جانبي
د ولتكن د اقرب الى ي . ولتكن س
نقطة في الدائرة غ ح د ي ن ح ود . ارم
القوسين ي س ا ب س ف فكل
واحدة منها نصف دائرة وي س ب

ي س ف ف س ا س ب اربع مثلثات كروية بين اقواس دائرتين ولها العمودان
س د و س غ

(١) لان س ا اقرب من س ب الى القوس س ح غ فالقوس س ا اطول
من القوس س ب وس ا + س ي < س ب + س ي فيكون س ب + س ي
اقل من نصف دائرة وي د بالمفروض اقصر من د ب فيكون ي س اقصر من
س ب (ق ١٢) فاذا وقع العمود داخل المثلث وكان مجموع الضلعين اقل من
نصف دائرة فالقسم الاقصر من القاعدة يلي الضلع الاقصر

(٢) في المثلث ف س ي الضلعان ف س س ي اقل من نصف دائرة
وي س اقصر من س ف لانه ابعد عن س ح غ . فاذا وقع العمود خارج المثلث
وكان مجموع الضلعين اقل من نصف دائرة فالقسم الاقصر يلي الضلع الاقصر

(٣) ولكن في المثلث ف س ا الضلعان ف س س ا اطول من نصف دائرة
واس اطول من س ف لان ي س اقصر من س ب فيكون ا س اقرب الى
س ح غ فيكون ا غ اقصر قسمي القاعدة وهو يلي الضلع الاطول

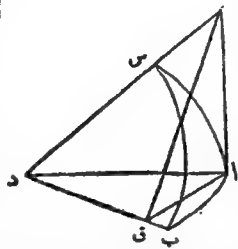
(٤) وفي المثلث ا س ب ا س وس ب معا اطول من نصف دائرة واس
اطول من ب س فاقصر قسمي القاعدة ا غ يلي الضلع الاطول

القضية الثامنة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة جيب احد الضلعين المحيطين
بالقائمة الى نصف قطر الكرة كنسبة ماس الضلع الآخر الى ماس
الزاوية التي تقابلها

ليكن اب س مثلثا كرويا ذا قائمة عند ا فنسبة جاب : ق : $\frac{ق}{س}$:: مم : اس : م

اب س . لكن د مركز الكرة . ارم د ا د ب
د س . وارسم ا ق عمودا على ب د فهو جيب
اب ومن ق ارم الخط المستقيم ق ي عمودا
على ب د في سطح ب د س ولتلاق د س في
ي . ارم ا ي



لكون الخط المستقيم د ق عمودا على
ق ا و ق ي يكون عمودا ايضا على سطح ق ي ا

(ق ٤ ك ٢) فالسطح اب د المار في د ق هو عمودي على السطح ا ي ق (ق ١٧
ك ٢) والسطح ا ي ق عمودي على اب د . ولكن السطح اس د ا و ا ي د ايضا
عمودي على اب د لان الزاوية الكروية ب اس قائمة . فيكون الخط ا ي موضع
تقاطع السطحين ا ي د ا ي ق عموديا على السطح اب د (ق ١٨ ك ٢) و ا ي ق
ي ا د قائمتين . فيكون ا ي ماس القوس اس . وفي المثلث البسيط ا ي ق ذب
القائمة عند ا تكون نسبة ا ق : ق : $\frac{ق}{س}$:: ا ي : ماس الزاوية ا ق (مثلثات
مستوية ق ا) ولكن ا ق هو جيب القوس اب و ا ي ماس القوس اس والزاوية
ا ق ي في ميل السطح س ب د على السطح اب د (حد ٤ ك ٢) وتعدل الزاوية
الكروية اب س فنسبة جيب القوس اب الى نصف القطر كمسبة ماس القوس
اس الى ماس الزاوية المتابلة اب س

فرع : لانه بموجب هذه القضية جاب : ق : $\frac{ق}{س}$:: مم : اس : م اب س
ولان $\frac{ق}{س}$:: نم : اب س :: مم : اب س : $\frac{ق}{س}$ (فرع اول حد ٩ مثلثات مستوية)
فبالمساواة جاب : نم : اب س :: مم : اس : $\frac{ق}{س}$

القضية التاسعة عشرة

في مثلث كروي قائم الزاوية تكون نسبة جيب الوتر الى نصف القطر
كجيب احد الضلعين الى جيب الزاوية التي تقابل ذلك الضلع

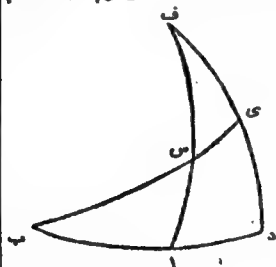
اس عمودية على ب د فسطح الدائرة اس عمودي على سطح الدائرة ب ا د واس
ايضا ثمر قطب ب ا د فتكون ف ذلك القطب وف اربع دائرة وف درج دائرة
وهكذا ايضا القوسان ب ي ب د . ففي المثلث س ي ف ذي القائمة عند ي يكون
س ي كال ب س وتر المثلث ا ب س وي ف كال القوس د ي قياس الزاوية
ا ب س وف س وتر المثلث س ي ف هو كال القوس اس والقوس ا د قياس
الزاوية س ي ف ي هو كال القوس ا ب وحسب (ق ١٨) في المثلث س ي ف لنا
ج س ي : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{م} :: \frac{ق}{م}$ ي ف : م ي س ف او في المثلث اس ب نجيب س
: $\frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م} :: \frac{ق}{م}$ ب س : م اس ب

فرع ١. لان نجيب س : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ ب س : م اس ب (و) فرع ا ح د ١
مثلثات مستوية) ثم ا ب س : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ م اس ب ف بالمساواة ثم اس ب
: نجيب س : $\frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م} :: \frac{ق}{م}$ ب س : م اس ب

النضية الحادية والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب زاوية الى نصف
القطر كماس الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى ماس الوتر

لبرسم كما في النضية السابقة . ثم في المثلث س ي ف نسبة جف ي : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{م}$
س ي : م س ف ي (ق ١٨) ولكن ج ي ف = نجيب ا ب س وم س ي = ثم
ب س وم س ف ي = ثم ا ب فاذا نج
ا ب س : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ ب س : ثم ا ب
(و) فرع اول ح د ١ مثلثات مستوية) ثم
ب س : $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ م ب س و ثم ا ب
: $\frac{ق}{س} :: \frac{ق}{ب} :: \frac{ق}{م}$ م ا ب ف بالمساواة بالقلب
ثم ب س : ثم ا ب : م ا ب : م ب س



و(ق ١١ ك ٥) نجاب س : ق : مم اب : مم ب س
 فرع اول . يتضح من هذه القضية ان مائي قوسين مثل اب وب س هما
 بالتكافؤ كظييري ماسيها
 فرع ثان . لان نجاب س : ق : مم اب : مم ب س وايضاً ق : نج
 ب س : مم ب س : ق فبالمساواة نجاب س : مم ب س : مم اب : ق
 اي نسبة نظير جيب احدى الزاويتين غير القائمة الى نظير ماسي الوتر كنسبة ماسي
 الضلع الذي يلي تلك الزاوية الى نصف القطر

القضية الثانية والعشرون

في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الوتر الى نظير جيب الضلع الاخر
 ليرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف ج س ف : ق : ج س ي :
 ج س ف ي (ق ١٩) ولكن ج س ف = نجس اوجس ي = نجوب س وج
 س ف ي = نجاب فنسبة نجس ا : ق : نجوب س : نجاب

القضية الثالثة والعشرون

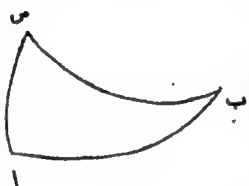
في مثلث كروي ذي قائمة تكون نسبة نظير جيب احد الضلعين الى
 نصف القطر كنسبة نظير جيب الزاوية المتقابلة ذلك الضلع الى
 جيب الزاوية الاخرى

ليرسم كما تقدم ثم في المثلث س ي ف ج س ف : ق : ج ي ف : ج
 ي س ف (ق ١٩) ولكن ج س ف = نجس اوج ي ف = نجاب س وج
 ي س ف = جب س افاذاً نجس ا : ق : نجاب س : جب س ا

الفضية الرابعة والعشرون

في مثلثات كروية ذات قوائم وغيرها تكون جيوب الاضلاع مناسبة لجيوب الزوايا التي تقابلها

اولاً . ليكن ا ب س ذا قائمة عند ا فحسب (ق ١٩) نسبة جيب الوتر ب س الى نصف القطر او الى جيب القائمة عند ا كجيب الضلع ا س الى جيب الزاوية عند ب وايضاً نسبة جيب ب س الى جيب الزاوية عند ا كجيب ا ب الى جيب الزاوية عند س (ق ١١ ك ٥) جيب الضلع ا س الى جيب الزاوية عند ب كجيب ا ب الى جيب الزاوية عند س



ثانياً . ليكن ا ب س مثلثاً كروياً غير ذي قائمة فتكون نسبة جيب احد اضلاعه مثل ب س الى جيب الآخرين ا س كسبة جيب الزاوية عند ا الى جيب الزاوية عند ب . من س ارم قوس دائرة عظيمة س د عمودية على ا ب . ففي المثلث ذي القائمة ب س د تكون نسبة جوب س : $\frac{1}{2} ق$ " ج س د : ج ب (ق ١٩) وفي المثلث ا د س جيب ا س : $\frac{1}{2} ق$ " جيب س د : جيب ا ب المساواة بالتب ج ب س : ج ا س :: ج ا : ج ب . وهكذا يبرهن ايضا ان ج ب س : ج ا ب :: ج ا : ج س

الفضية الخامسة والعشرون

في مثلث كروي غير ذي قائمة اذا رسمت قوس عمودية من احدى الزوايا الى الضلع المقابل لها تكون نسبة نظير جيب احدى الزاويتين عند

القاعدة الى نظير جيب الاخرى كنسبة جيب احد قسي الزاوية التي

انقسمت بالعمودية الى جيب قسمي الآخر

ليُرم كما في القضية السابقة ولكن د عمودية على القاعدة اب فنسبة نظير

جيب ب : نجح : جيب س د : جاس د

لان (ق ٢٢) نجح س د : ق : نجب : جاس د وفي المثلث ذي القائمة

اس د نجح س د : ق : نجح : جاس د وفي (الكه) نجب : جاس د : ب :

نجح : جاس د وبالمبادلة نجب : نجح : جيب س د : جاس د

القضية السادسة والعشرون

ليُفرض كما تقدم فنسبة نظير جيب ب س الى نظير جيب س ا كنسبة

نظير جيب ب د الى نظير جيب د ا

لانه في المثلث ب س د (ق ٢٢) نجب س : نجب د : د س : ق وفي

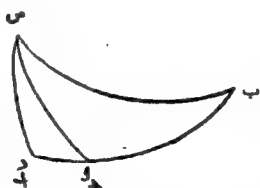
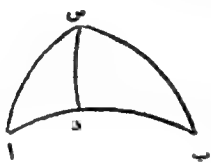
المثلث اس د نجح اس : نجح ا د : نجح د س : ق وفي (الكه) نجب س : نجب د

: نجح اس : نجح ا د وبالمبادلة نجب س : نجح اس : نجب د : نجح ا د

القضية السابعة والعشرون

ليُرم كما تقدم فنسبة جيب ب د الى جيب د ا كنسبة ماس ب الى

ماس ا بالتكافؤ



في المثلث ب س د (ق ١٨) جيب د : ق : م د س : م ب وفي المثلث

اس د جاد : ق : م د س : م ا وبالمبادلة بالقلب جيب د : جاد : م

ب : ا

م $\frac{1}{2}$ (م - ن) ونسبة الاشكال القائمة الزوايا بعضها الى بعض اذا كانت على علق
واحد في كسبة قواعدها بعضها الى بعض فتكون نسبة م $\frac{1}{2}$ (ا + ب) \times م $\frac{1}{2}$ (ا +
ب) : م $\frac{1}{2}$ (ا + ب) \times م $\frac{1}{2}$ (ا - ب) :: م $\frac{1}{2}$ (م + ن) \times م $\frac{1}{2}$ (م + ن) : م $\frac{1}{2}$ (م +
ن) \times م $\frac{1}{2}$ (م - ن). فالجزء الاول من هذه النسبة والمثلث متساويان لأن كل
واحد منها يعدل مربع نصف القطر (فرع اول مثلثات بسيطة) فالثاني والرابع
متساويان (ق ٩ كه) او م $\frac{1}{2}$ (م + ن) \times م $\frac{1}{2}$ (م - ن) = م $\frac{1}{2}$ (ا + ب) \times م $\frac{1}{2}$ (ا - ب)
م $\frac{1}{2}$ (ا - ب) او يترجع الحروف الاصلية م $\frac{1}{2}$ (ب + د + ا) \times م $\frac{1}{2}$ (ب - د - ا)
= م $\frac{1}{2}$ (ب + س + اس) \times م $\frac{1}{2}$ (ب - س - اس)

فرع اول. لأن اضلاع اشكال متساوية ذات زوايا قائمة هي متناسبة بالتكافؤ
فنسبة م $\frac{1}{2}$ (ب + د + ا) : م $\frac{1}{2}$ (ب + س + اس) :: م $\frac{1}{2}$ (ب - س - اس) : م $\frac{1}{2}$ (ب - د - ا)

فرع ثان. اذا وقعت العمودية س د داخل المثلث فلنا ب د + ا د = ا ب
القاعدة واذا وقعت س د خارج المثلث ب د - ا د = ا ب فعلى الحالة الاولى نصير
النسبة السابقة في الفرع الاول هكذا

م $\frac{1}{2}$ ا ب : م $\frac{1}{2}$ (ب + س + اس) :: م $\frac{1}{2}$ (ب - س - اس) : م $\frac{1}{2}$ (ب - د - ا د)
وفي الحالة الثانية نصير بالقلب والمبادلة
م $\frac{1}{2}$ ا ب : م $\frac{1}{2}$ (ب + س + اس) :: م $\frac{1}{2}$ (ب - س - اس) : م $\frac{1}{2}$ (ب + د + ا د)

نتيه * هذه القضية والاثنان الاثنان قد وضعن الملم نايرير الاسكونسي وهن
جزيلات الفائدة لسهولة استعملهن في الانساب

القضية الثلاثون

في مثلث كروي اذا رسمت عمودية من احدى زواياه على الضلع المقابل
او القاعدة تكون نسبة جيب مجموع الزاويتين عند القاعدة الى جيب
فضلتها كنسبة ماس نصف القاعدة الى ماس نصف فضلة قسميها اذا
وقعت العمودية داخل المثلث. وكنسبة نظير ماس نصف القاعدة الى

نظير ماس مجتمعا قسميها اذا وقعت العمودية خارج المثلث . ونسبة
جيب مجتمع الضلعين الى جيب فضلتهما كنسبة نظير ماس نصف
الزاوية بين الضلعين الى ماس نصف فضلة الزاويتين الحادتين بين
الضلعين والعمودية اذا وقعت داخل المثلث . والى ماس نصف
مجتمعا اذا وقعت العمودية خارج المثلث

ليكن ا ب س مثلثا كرويا واد عمودية على القاعدة ب س فنسبة ج (س + ب)
ج (س - ب) :: م $\frac{1}{2}$ ب س : م $\frac{1}{2}$ (ب د - د س) اذا وقعت ا د داخل المثلث
وج (س + ب) :



ج (س - ب) ::
م $\frac{1}{2}$ ب س : م $\frac{1}{2}$ (ب د + د س) اذا
وقعت ا د خارج المثلث
وايضاً ج (ب + ا س)

ج (ا ب - ا س) :: م $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د - س ا د) اذا وقعت ا د داخل
المثلث وج (ا ب + ا س) : ج (ا ب - ا س) :: م $\frac{1}{2}$ ب ا س : م $\frac{1}{2}$ (ب ا د +
س ا د) اذا وقعت ا د خارج المثلث

لانه في المثلث ب ا س (ق ٢٧) م ب : م س :: ج س د : ج ب د و (ق ١٤)
م س + م ب : م س - م ب :: ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د
وحسب السابقة التي تلو هذه القضية م س + م ب : م س - م ب :: ج (س
+ ب) : ج (س - ب) وايضاً ج ب د + ج س د : ج ب د - ج س د :: م $\frac{1}{2}$
(ب د + س د) : م $\frac{1}{2}$ (ب د - س د) (ق ٢ مثلثات بسيطة) و (ق ١١ ك)
ج (س + ب) : ج (س - ب) :: م $\frac{1}{2}$ (ب د + س د) : م $\frac{1}{2}$ (ب د - س د)
واذا وقعت ا د داخل المثلث ب د + س د = ب س فنسبة ج (س + ب) :
ج (س - ب) :: م $\frac{1}{2}$ ب س : م $\frac{1}{2}$ ب س (ب د - س د) واذا وقعت ا د خارج المثلث
ب د - س د = ب س فنسبة ج (س + ب) : ج (س - ب) :: م $\frac{1}{2}$ (ب د +

س د : م ب س او لكون ماسي قوسين كظيرتي ماسيها بالتكافؤ ج (س +
ب) : ج (س - ب) :: م ب س : م ب س (ب د + س د)
بقي ان نبرهن القسم الثاني من هذه القضية . فلان (ق ٢٨) م اب : م اس



نجد س اد : نجد ب اد - نجد ب اد وحسب السابقة المذكورة اسفل
م اب + م اس : م اب - م اس :: ج (اب + اس) : ج (اب - اس)
(و فرغ اول ق ٢ مثلثات بسيطة) نجد س اد + نجد ب اد : نجد س اد - نجد ب اد
:: م ب س : م ب س (ب اد - س اد) فاذا (ق ١١) ج (اب
+ اس) : ج (اب - اس) :: م ب س : م ب س (ب اد + س اد)
فاذا وقعت اد داخل المثلث ب اد + س اد = ب اس فنسبة ج (اب + اس)
: ج (اب - اس) :: م ب س : م ب س (ب اد - س اد)
واذا وقعت اد خارج المثلث ب اد - س اد = ب اس فنسبة ج (اب +
اس) : ج (اب - اس) :: م ب س : م ب س (ب اد + س اد) اولان م
ب س : م ب س (ب اد + س اد) :: م ب س : م ب س (ب اد + س اد)
فتكون نسبة ج (اب + اس) : ج (اب - اس) :: م ب س : م ب س (ب اد
+ س اد)

سابقة

نسبة مجتمع ماسي قوسين الى فضلة ماسيها كنسبة جيب مجتمع القوسين
الى جيب فضلتها

لكن ا ب قوسين فنسبة م + م ب : م - م ب :: ج (ا + ب)
: ج (ا - ب) لانه (حسب ق ٢ مثلثات بسيطة) ج ا X جوب + ج ا X

ان نسبة جـس + جـب : جـس - جـب :: جـاب + جـاس : جـاب - جـاس
 وحسب عا^٢ فصل ٢ مثلثات بسيطة) جـس + جـب = ٢ جـا^١ (س + ب) +
 نجـا^١ (س - ب) = ٢ جـص × نجـض وجـس - جـب = ٢ نجـا^١ (س + ب)
 × جـا^١ (س - ب) = ٢ نجـص × جـض فاذا نسبة ٢ جـص × نجـض : ٢ نجـ
 ص × جـض :: جـاب + جـاس : جـاب - جـاس وإذا قُرض ان^١
 (اب + اس) = ط^١ و (اب - اس) = ظ^١ (ق ٢ مثلثات بسيطة) جـاب
 + جـاس : جـاب - جـاس :: م^١ (اب + اس) : م^١ (اب - اس) ::
 م ط : م ظ فنسبة جـص × نجـض : نجـص × جـض :: م ط : م ظ

$$\text{ولأن } \frac{م ك}{م ب} = \frac{جـص \times نجـض}{جـص \times نجـض} = \frac{م ظ}{جـص \times نجـض}$$

فيضرب اشياء متساوية في اشياء متساوية نصير

$$\frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ط} = \frac{(جـص)^2 \times نجـص \times نجـض}{(جـص)^2 \times نجـص \times نجـض} = \frac{م ط}{م ب} \text{ ولكن}$$

$$(ق ٢٩) \frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} \text{ فاذا } \frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} \text{ او } م ط = م ك$$

$$\frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} \text{ وايضا } \frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط}{م ب} \text{ ولكن } \frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ط} = \frac{م ك}{م ب}$$

$$\frac{م ط}{م ط} = \frac{(جـص)^2}{(جـص)^2} \text{ فاذا } \frac{م ط}{م ط} = \frac{(جـص)^2}{(جـص)^2} \text{ و } \frac{م ط}{م ب} = \frac{جـص}{جـص} \text{ او نسبة}$$

جـص : جـض :: م ب : م ط او جـب (س + ب) : جـا (س - ب) ::
 م^١ ب : م^١ س :: م^١ (اب - اس) وهذا القسم الاول من القضية

$$\text{ايضا لأن } \frac{م ط}{م ط} = \frac{جـص \times نجـض}{جـص \times نجـض} \text{ او بالقلب } \frac{م ط}{م ط} = \frac{جـص \times نجـض}{جـص \times نجـض}$$

$$\text{ولأن } \frac{م ك}{م ب} = \frac{جـص + نجـض}{جـص + نجـض} \text{ فبالضرب لنا } \frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ط} =$$

$$\frac{(نجـض)^2}{(نجـص)^2} \text{ وقد تبرهن ان } \frac{م ك}{م ب} = \frac{م ط + م ط}{(م ب)^2} \text{ فاذا } \frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ط} =$$

$$\frac{(م ط)^2}{(م ب)^2} \text{ وقد تبرهن ان } \frac{م ك}{م ب} \times \frac{م ط}{م ط} = \frac{(نجـض)^2}{(نجـص)^2} \text{ فاذا } \frac{(نجـض)^2}{(نجـص)^2} =$$

(٢ ط) $\frac{٢}{١}$ وبالنسبة نجح $\frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$ او نسبة نجح ص : نجح ض :: م ب :

م ط او نجح (س + ب) : نجح (س - ب) :: م $\frac{١}{٢}$ ب س : م $\frac{١}{٢}$ (س + ب)

وهذا القسم الثاني من القضية

فرع أول . اذا وضع برهان هذه القضية على الزاوية المثلثة ا ب س (ق ١١)

فها ان جيب نصف مجموع متي قوسين او نصف فضلتهما هو جيب نصف مجموع القوسين او نصف فضلتهما وهكذا في نظير الجيوب والمماسات لنصف مجموع قوسين معينين او لنصف فضلتهما وبما ان ماس نصف ممت قوس هو نظير الماس لنصف القوس فالنتيجة في ان في مثلث كروي تكون نسبة جيب نصف مجموع ضلعين الى جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير ماس نصف الزاوية بينها الى ماس نصف فضلة الزاويتين اللتين تقابلتهما وايضا نسبة نظير جيب نصف مجموع هذين الضلعين الى نظير جيب نصف فضلتهما كنسبة نظير ماس نصف الزاوية بينها الى ماس نصف مجموع الزاويتين المقابلتين لها

فرع ثان . اذا فرض ا ب س الزوايا الثلاث لمثلث كروي وآ ب س الاضلاع المقابلة لها فلنا هذه النسب

$$(١) \text{ ج } \frac{١}{٢} (١ + ب) : \text{ ج } \frac{١}{٢} (١ - ب) :: \text{ م } \frac{١}{٢} س : \text{ م } \frac{١}{٢} (أ - ب)$$

$$(٢) \text{ نج } \frac{١}{٢} (١ + ب) : \text{ نج } \frac{١}{٢} (١ - ب) :: \text{ م } \frac{١}{٢} س : \text{ م } \frac{١}{٢} (أ + ب)$$

$$(٣) \text{ ج } \frac{١}{٢} (أ + ب) : \text{ ج } \frac{١}{٢} (أ - ب) :: \text{ م } \frac{١}{٢} س : \text{ م } \frac{١}{٢} (١ - ب)$$

$$(٤) \text{ نج } \frac{١}{٢} (أ + ب) : \text{ نج } \frac{١}{٢} (أ - ب) :: \text{ م } \frac{١}{٢} س : \text{ م } \frac{١}{٢} (١ + ب)$$

عملية اولى

في مثلث كروي قائم الزاوية مفروض شيان من اجزائه الستة غير القائمة فعلينا ان نجد الثلاثة الاخر

هذه العملية لما ست عشرة حالة متضمنة في هذا الجدول مبنية على المثلث اب س
ذوي القائمة عند ا



مفروض	مطلوب	الحل	
ب س	ا س	ا ق : ج ب س :: ج ب : ج ا س (١٩)	١
و	ا ب	ا ق : نج ب :: م ب س : م ا ب (٢١)	٢
ب	س	ا ق : نج ب س :: م ب : م س (٢٠)	٣
ا س	ا ب	ا ق : ج ا س :: م س : م ا ب (١٨)	٤
و	ب س	نج س : ا ق :: م ا س : م ب س (٢١)	٥
س	ب	ا ق : نج ا س :: ج س : نج ب (٢٣)	٦
ا س	ا ب	م ب : م ا س :: ا ق : ج ا ب (١٨)	٧
و	ب س	ج ب : ج ا س :: ا ق : ج ب س (١٩)	٨
ب	س	نج ا س : نج ب :: ا ق : ج س (٢٣)	٩
ا س	ا ب	نج ا س : نج ب س :: ا ق : نج ا ب (٢٢)	١٠
و	ب	ج ب س : ج ا س :: ا ق : ج ب (١٩)	١١
ب س	س	م ب س : م ا س :: ا ق : نج س (٢١)	١٢
ا ب	ب س	ا ق : نج ا ب :: نج ا س : نج ب س (٢٢)	١٣
و	ب	ج ا ب : ا ق :: م ا س : م ب (١٨)	١٤
ا س	س	ج ا س : ا ق :: م ا ب : م س (١٨)	١٤
ب	ا ب	ج ب : نج س :: ا ق : نج ا ب (٢٣)	١٥
و	ا س	ج س : نج ب :: ا ق : نج ا س (٢٣)	١٥
س	ب س	م ب : م س :: ا ق : نج ب س (٢٠)	١٦

جدول تُعرف به اجناس الاضلاع والزوايا المستعملة في الجدول السابق

١	اس وب من جنس واحد اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون اب وب من جنس واحد والآخران مختلفان
٢	(فرع ١٥) اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون س وب من جنس واحد والآخران مختلفان
٣	(١٥)
٤	اب وس من جنس واحد (١٤) اذا كان اس وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ والآخران مختلفان
٥	ب س $< ٩٠^\circ$ (فرع ١٥)
٦	ب واس من جنس واحد
٧	ملتبس
٨	ملتبس
٩	ملتبس
١٠	اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون اب واس من جنس واحد والآخران مختلفان (١٥)
١١	اس وب من جنس واحد (١٤) اذا كان ب س $> ٩٠^\circ$ يكون اس وس من جنس واحد والآخران مختلفان (فرع ١٥)
١٢	(فرع ١٥)
١٣	ب س $> ٩٠^\circ$ اذا كان اب واس من جنس واحد (فرع اول ١٥)
١٤	ب واس من جنس واحد (١٤)
١٤	س واب من جنس واحد (١٤)
١٥	اب وس من جنس واحد (١٤)
١٥	اس وب من جنس واحد (١٤) اذا كانت ب وس من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ والآخران مختلفان
١٥	ب س $< ٩٠^\circ$ (١٥)

تنبيه * يراد بالمتبس ان المطلوب له فيجانب اي زاوية ما او متبها

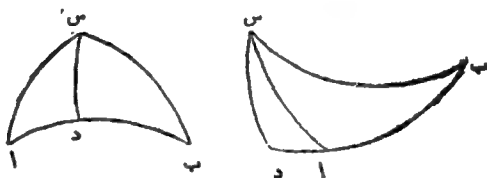
هذا الجدول مثل الاول غير انه قد فرض فيه ان $\bar{A} =$ الضلع الذي يقابل الزاوية القائمة \bar{a} - الضلع الذي يقابل الزاوية \bar{b} وس - الضلع الذي يقابل الزاوية \bar{c}

١	ج ب = ج أ × ج ب	ب	
٢	م س = م أ × نج ب	س	أ و ب
٣	ن م س = ن م أ × م ب	س	
٤	م س = ج ب × م س	س	
٥	م أ = $\frac{م ب}{ن ج س}$	أ	ب وس
٦	نج ب = نج ب × ج س	ب	
٧	ج س = $\frac{م ب}{م ب}$	س	
٨	ج أ = $\frac{ج ب}{ج ب}$	أ	ب وب
٩	ج س = $\frac{نج ب}{نج ب}$	س	
١٠	ج س = $\frac{نج أ}{نج ب}$	س	
١١	ج ب = $\frac{ج ب}{ج أ}$	ب	أ و ب
١٢	نج س = $\frac{م ب}{م ب}$	س	
١٣	نج أ = نج ب × نج س	أ	
١٤	م ب = $\frac{ن م ب}{ج س}$	ب	ب وس
١٤	م س = $\frac{ن م س}{ج ب}$	س	
١٥	نج س = $\frac{نج س}{ج ب}$	س	
١٥	نج ب = $\frac{نج ب}{ج س}$	ب	ب وس
١٦	نج أ = $\frac{ن م س}{م ب}$	أ	

علمية ثانية

في مثلث كروي غير ذي قائمة مفروض ثلاثة اشياء من ستة فعلينا ان
نجد الثلاثة الأخر

تنبيه . في هذا الجدول اذا رأيت حرف المخاص فعلام رقم هندي مكملا (ح ٤)
فالاشارة بذلك الى الحالات في الجدول السابق والاعداد وحدها تشير الى قضايا
اصول المثلثات الكروية



مفروض	مطلوب	الحل
الضلعان ا ب ا س والزاوية بينها ١	احدى الزاويتين الاخريتين ب	ارسم العمودية س د من الزاوية المجهولة على ا ب فنجد ا ق : نجما : م ا س : م ا د (ح ٢) فيعرف ب د وجب د : ج ا د : م ا : م ب (٢٧) ب و ا من جنس واحد اذا كان ا ب < ب د والا فمختلفان (١٦)
الضلع الثالث ب س		ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المجهولتين على الضلع ا ب ثم نسبة ا ق : نجما : م ا س : م ا د (ح ٢) فيعرف ب د ونجما د : نجوب د : نجما س : نجوب س (٣٦) اذا كان ا د و د ب من جنس واحد يكون ا س و س ب من جنس واحد والا فمختلفان

مفروض	مطلوب	الحل
الزاويتان ا و س ب	الضلع ب س	من س طرف اس الذي يلي الضلع المطلوب ا رسم س د عمودية على اب ثم ق : نجح اس : مم ا : ثم اس د (ح ٢) فتعرف ب س ونسبة نجح ب س د : نجح اس د : مم اس : مم ب س (٢٨) اذا كان ا و ب س د من جنس واحد يكون ب س $> ٩٠^\circ$ والا فاكبر من ٩٠°
والضلع بينهما اس	الزاوية الثالثة ب	ارسم العمودية س د من احدى الزاويتين المفروضتين ٤ على اب الضلع المقابل ثم ق : نجح اس : مم ا : ثم اس د (ح ٢) فتعرف ب س ونسبة ج اس د : ج ب س د : نجح ا : نجح ب (٢٥) اذا وقعت س د داخل المثلث او كانت اس ب اكبر من ب س د تكون ب و ا من جنس واحد والا فمختلفان (١٦)
الزاوية ب التي تقابل الضلع الآخر المفروض اس	الزاوية ب	ج ب س : ج ا س : ج ا : ج ب (٢٤) جنس ب ٥ ملتبس الا اذا تعين كون ا + ب اكثرا و اقل من ١٨٠ لكون اس + ب س اكثرا و اقل من ١٨٠ (١٠)
ضلعان اس وب س والزاوية ا التي تقابل	الزاوية اس ب بين الضلعين المفروضين	من اس ب الزاوية المطلوبة ا رسم س د عمودية على ٦ اب ثم ق : نجح اس : مم ا : ثم اس د (ح ٢) وم ب س : مم اس : نجح اس د : نجح ب س د (٢٨) واس د + ب س د = اس ب وهي ملتبسة
احدهما ب س	الضلع الثالث ا ب	ارسم س د عمودية من س الزاوية بين الضلعين ٧ المفروضين على اب ثم ق : نجح اس : مم ا : مم ا د (ح ٢) ونجح اس : نجح ب س : نجح ا د : نجح ب د (٢٦) و ا ب = ا د + ب د فيكون اب ملتبسا



مفروض	مطلوب	الحل
الضلع ب س	ج ب : ج ا :: ج ا س : ج ب س (٢٤) و ب س ٨	من الزاوية المجهولة س ا ر م س د عمودية على ا ب ثم ٦
المقابل الزاوية ملتبس الا اذا تعين كون ا س + ب س اكثر او اقل	من ١٨٠° حسبما كانت ا ب اكثر او اقل من	١ ق : نج ا :: م ا س : م ا د (٢٥) و م ب : م ا
الافرى	١٨٠° (١٠)	ج ا د : ج ب د و ب د ملتبس فاذا ا ب = ا د +
المفروضة ا	الضلع ا ب	ب دولة اربع قيمات غير ان البعض منها يخرج بلزوم
	الذي يلي	كون ا ب اقل من ١٨٠°
زاويتان	الزاويتين	من الزاوية المطلوبة ا ر م س د عمودية على ا ب ثم ١٠
ا و ب	الذي يلي	١ ق : نج ا س :: م ا : م ا س د (٢٦) و نج ا :
والضلع	الزاويتين	نج ب : ج ا س د : ج ب س د (٢٥) ب س د
ا س	المفروضتين	ملتبس فاذا ا س = ا س د + ب س د ولما
الذي يقابل ا و ب	ب	اربع قيمات غير ان البعض منها يخرج بلزوم كون
	احدهما	ا س ب اقل من ١٨٠°
	ب	

<p>الاضلاع الثلاثة ا ب اس ب س</p>	<p>احدى الزوايا ا</p>	<p>من س احدى الزاويتين الغير المطلوبين ا ر م س د ١١ عمودية على ا ب . ثم استعمل قوساى حتى تكون نسبة م $\frac{1}{2}$ ا ب : م $\frac{1}{2}$ (ا س + ب س) :: م $\frac{1}{2}$ (ا س - ب س) : م $\frac{1}{2}$ س . فاذا كان ا ب اكبر من سى فيكون ا ب مجموع ا د و د ب وى فضلنها واذا كان ا ب اصغر من سى يكون مجموع ا د و د ب و ا ب فضلنها (٢٩) وعلى المحالين ا د و ب د معروفان وم ا س : م ا د :: $\frac{1}{2}$ ق : نجما</p>
<p>الزوايا الثلاث ا و ب وس</p>	<p>احد الاضلاع ب س</p>	<p>افرض متات الزوايا ا و ب وس المفروضة ا و ب ١٢ وس واحصها اضلاع مثلث كروي واستعمل بالمحالة المابقة الزاوية من ملا المثلث التي تقابل الضلع ا فهي م $\frac{1}{2}$ ضلع المثلث المفروض الذي يقابل الزاوية ا م $\frac{1}{2}$ ا ب س (١١)</p>

في هذا الجدول فُرِضَت الزوايا اوب وس كما تقدم والاتصاع التي تقابلها
وب وس وكوى بعدلان قسي القاعدة او قسي الزاوية التي تقابلها

مفروض مطلوب		الحل
ب	اضلعان بـ وس والزاوية بينهما	استعلمك حتى ان م ك = م ب X نج اثم م ب = ١ ج ك X ١٢ (ج س - ك)
آ	الزاويتان اوس والضلع بـ	استعلمك كما تقدم ثم نج ا = نج ب X نج ا (س - ك) = ٢ نج ك
آ	الزاويتان اوس والضلع بـ	استعلمك حتى ان م ك = نج ب X م ا ثم م آ = ٣ م ب X نج ك نج (س - ك)
ب	الضلعان اوب والزاويتان	استعلمك كما تقدم ثم نج ب = نج ا X ج (س - ك) = ٤ ج د
ب	الضلعان اوب والزاويتان	ج ب = ج ب X ج ا = ٥ ج ا
س	الزاويتان اوب والضلع بـ	استعلمك حتى ان م ك = نج ب X م ا ثم نج س = ٦ نج د X م ب ١٣
س	الزاويتان اوب والضلع بـ	استعلمك حتى ان م ك = م ب X نج ا واستعلم ي ٧ حتى ان نج ب = نج ا X نج ك س = ك + ي
آ	الزاويتان اوب والضلع بـ	ج آ = ج ب X ج ا = ٨ ج ب
س	الزاويتان اوب والضلع بـ	استعلمك حتى ان م ك = م ب X نج ا واستعلم ي ٩ حتى ان ج د = ج د X م ب = س = ك + ي
س	الزاويتان اوب والضلع بـ	استعلمك حتى ان م ك = نج ب X م ا واستعلم ي ١٠ حتى ان ج د = ج د X نج ب = ١ س = ك + ي

الحل	مفروض مطلوب	
١١	<p>لنفرض ان $\bar{ا} + \bar{ب} + \bar{س} = \bar{ص}$</p> <p>$\frac{\bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}}{\bar{ج} \bar{ب} \times \bar{س}} = \frac{\bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}}{\bar{ج} \bar{ب} \times \bar{س}} \times \bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب} = \bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}$</p> <p>$\frac{\bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}}{\bar{ج} \bar{ب} \times \bar{س}} = \bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}$</p> <p>او $\frac{\bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}}{\bar{ج} \bar{ب} \times \bar{س}} = \bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}$</p>	<p>$\bar{ا}$</p> <p>$\bar{ب}$</p> <p>$\bar{س}$</p>
١٢	<p>لنفرض ان $\bar{ا} + \bar{ب} + \bar{س} = \bar{ص}$</p> <p>$\frac{\bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}}{\bar{ج} \bar{ب} \times \bar{س}} = \frac{\bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}}{\bar{ج} \bar{ب} \times \bar{س}} \times \bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب} = \bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}$</p> <p>$\frac{\bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}}{\bar{ج} \bar{ب} \times \bar{س}} = \bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}$</p> <p>او $\frac{\bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}}{\bar{ج} \bar{ب} \times \bar{س}} = \bar{ج} \bar{ا} - \bar{ب}$</p>	<p>$\bar{ا}$</p> <p>$\bar{ب}$</p> <p>$\bar{س}$</p>



خاتمة اصول قياس المثلثات الكروية

في قواعد الاجزاء الدائرة للعلم ناير
قواعد الاجزاء الدائرة التي استخرجها المعلم ناير الاسكونسي من اصول قياس
المثلثات الكروية في كثيرة القوائد لسهولة حفظها واستعمالها في الحسابات بواسطة
الانساب او اللوغارثمات

حدود

١ في مثلث كروي قائم الزاوية اذا غصّ النظر عن القائمة تبقى خمسة اجزاء
اي ثلاثة اضلاع وزاويتان غير قائمتين فالضلعان المحيطان بالقائمة وكالات الثلاثة
الآخر اي الزاويتين والوتر في الاجزاء الدائرة . مثال ذلك في المثلث ا ب س
ذي القائمة عند ا فالاجزاء الدائرة في ا س ا ب وكالات ب و ب س وس وسميت
بالاجزاء الدائرة لانها اذا عدت على ترة س تدور حول المثلث
٢ اذا اخذ واحد من هذه الاجزاء الخمسة وسي الوسط فمن الاربعة الباقية



اثنان من اليان الوسط فها المواليان احدها
عن يمين الوسط والآخر عن يساره
والاخران هما المقابلان وبين كل واحد
منها والوسط واحد من المواليين

مثال ذلك في المثلث ا ب س

فالاجزاء الدائرة حسب الحد الاول في ا س ا ب - ٩٠ - ب - ٩٠ - ب س - ٩٠ -
س واذا حسبنا ا س الوسط يكون ا ب و ٩٠ - س الموالين و ٩٠ - ب و ٩٠ -
ب س المقابلين واذا حسبنا ا ب الوسط يكون ا س و ٩٠ - ب الموالين و ٩٠ -
ب س و ٩٠ - س المقابلين واذا حسبنا ب س الوسط يكون ا ب و ٩٠ - ب
و ٩٠ - س الموالين و ا س و ا ب المقابلين وهكذا الى آخره . واذا قرّر ذلك
فقاعدة للاجزاء الدائرة في في هذه

القضية

في مثلث كروي قائم الزاوية القائم الزوايا مسطح نصف القطر في
جيب الوسط يعدل القائم الزوايا مسطح ماسي الموالين او يعدل
مسطح نظيري جيب المقابلين

تبرهن هذه القضية بان يحمل كل جزء وسطا في توجد ثم تقابل القضية على
احد البراهين السابق ذكرها . فاذا جعل ب س وسطا لنا ٢٠ - ب و ٢٠ - س
الموالين ا ب و ا س المقابلين و ق خ نج ب س = نم ب س (حسب
ق ٢٠ فرع ٢٠) و ق خ نج ب س = نج ا ب س (حسب ق ٢١)
فاذا قصدت ان تحمل مسئلة بواسطة هذه القضية فانظر الى اي الاشياء المهمة
اعني المفروضين والمطلوب يحمل وسطا لكي يكون الاخران على بعد واحد من فلا بد
من وجود المطلوب في احدي النظريتين المذكورتين في القضية

فلو فرض ا ب و ا س وكان المطلوب س فالامر واضح انه اذا جعل ا ب
وسطا يكون ب س وس المقابلين و ق خ ج ا ب = ج س خ ج ب س لان
ج س = نج (٢٠ - س) ونج (٢٠ - ب س) = ج ب س فاذا ج س =
ج ا ب
ج ب س

ولو فرض ب س وس وكان ا س المطلوب فاذا جعل س وسطا يكون
ا س و ٢٠ - ب س الموالين و ق خ نج س = م ا س خ نم ب س او م ا س =
نج ب س = نج س + م ب س لانه قد تبرهن سابقا ان $\frac{1}{\text{نم ب س}} = \frac{1}{\text{م ب س}}$
م ب س

وقد استخرج المعلم ناهير من القضية الحادية والثلاثين عبارات لحل المسائل في
مثلث غير ذي قائمة . فلينرض كما تقدم زوايا المثلث ا و ب وس والاضلاع التي
تقابلها ا و ب وس فلنا اربعة احوال

(١)

مفروض ضلعان ب وس والزاوية ا بينها
مطلوب الزاويتان ب وس

$$\text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س}) = \text{نم} \frac{1}{2} \times \frac{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س})}{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{س})} \quad \text{ق ٢١ فرع أول}$$

$$\text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{س}) = \text{نم} \frac{1}{2} \times \frac{\text{نح} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س})}{\text{نح} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{س})} \quad \text{ق ٢١ فرع أول}$$

مطلوب الضلع الثالث

ج ب : ج ا :: ج ب : ج ا

(٢)

مفروض ضلعان ب و س والزوايا ب المقابلة لاجدها

مطلوب س والزوايا المقابلة للضلع الآخر

ج ب : ج س :: ج ب : ج س

لمعرفة الزاوية بينها

$$\text{نم} \frac{1}{2} - \text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س}) = \frac{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{س})}{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{س})} \quad \text{ق ٢١ فرع أول}$$

لمعرفة الضلع الثالث

ج ب : ج ا :: ج ب : ج ا

(٣)

مفروض زاويتان ا و ب والضلع س بينها

مطلوب الضلعان الآخران ا و ب

$$\text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ا}) = \text{م} \frac{1}{2} \text{س} \times \frac{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ا} - \text{ب})}{\text{ج} \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب})} \quad (٣١)$$

$$\text{م} \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{ا}) = \text{م} \frac{1}{2} \text{س} \times \frac{\text{نح} \frac{1}{2} (\text{ا} - \text{ب})}{\text{نح} \frac{1}{2} (\text{ا} + \text{ب})} \quad (٣١)$$

لمعرفة الزاوية الثالثة

ج ا : ج س :: ج ا : ج س

(٤)

مفروض الزاويتان ا و ب والضلع المقابل احدهما ا

مطلوب ب الضلع الذي يقابل الاخرى

ج ا : ج ب :: ج ا : ج ب

لمعرفة من الضلع بين الضلعين المفروضين

$$(٣١) \quad \frac{\frac{1}{2} \sin (A+B)}{\frac{1}{2} \sin (A-B)} \times (A-B) = \frac{1}{2} \sin C$$

لمعرفة الزاوية الثالثة

جأ : جص : جأ : جص

قد وضعنا هنا عبارات لحل المسائل اذا فرضت اضلاع مثلث ولكن الفضية التي هي مبنية عليها لم تدرهن في ما سبق. المفروض كما تقدم الزوايا ا ب س والاضلاع ا ب س

لمعرفة الزاوية ا بين ب و س

نفرض ان $\frac{1}{2} C = 1$ و $A + B = S = ص$

$$\frac{\frac{1}{2} \sin (S-B)}{\frac{1}{2} \sin (S-A)} \times \frac{1}{2} \sin (S-A) = \frac{1}{2} \sin (S-B)$$

$$\frac{\frac{1}{2} \sin (S-B)}{\frac{1}{2} \sin (S-A)} = \frac{1}{2} \sin (S-B)$$

واذا فرض الزوايا الثلاث ا ب س وكان المطلوب س الضلع بين ا و ب

نفرض ان $A + B = S = ص$

$$\frac{\frac{1}{2} \sin (S-A)}{\frac{1}{2} \sin (S-B)} \times \frac{1}{2} \sin (S-B) = \frac{1}{2} \sin (S-A)$$

$$\frac{\frac{1}{2} \sin (S-A)}{\frac{1}{2} \sin (S-B)} = \frac{1}{2} \sin (S-A)$$

هذه النظريات كثيرة الاستعمال لسهولة استخدامها في الحسابات بواسطة الانساب فاذا كانت ازاوية كثيرة الانفراج يجب ان نستعمل النظرية الثانية التي تدل على قيمة نظير جيب نصفها والا فالاولى افضل التي تدل على قيمة جيب نصفها وهكذا يقال في الضلع س وسبب ذلك قد اتضح في اصول المثلثات البسيطة

وكان الفراغ من تبييض في ١٤ آب سنة ١٨٥٧ في مدينة صيدا

انتهى

